Expérience de Rowland

Solution

1.1.1 $\vec{B} = B_z(z)\,\vec{u_z}$ sur l'axe car tous les plans contenant (Oz) sont d'antisymétrie

112 $\sigma_s = \sigma$ $\quad \vec{v} = r\omega\,\vec{u_\theta}$ donc $\vec{j_s} = \sigma r\omega\,\vec{u_\theta}$ sur la largeur dr : $dI = \sigma r \omega\, dr$

113 Avec Biot-Savart, c.f. TD n°6 $\quad d\vec{B} = \dfrac{\mu_0\, dI}{2r}\sin^3\theta\,\vec{u_z}$

114 $B_z = \displaystyle\int_0^\alpha dB_z = \int_0^\alpha \frac{\mu_0 \sigma r \omega\, dr}{2r}\sin^3\theta$ $\quad$ avec $r = z\tan\theta$, $\quad dr = \dfrac{z}{\cos^2\theta}d\theta$

$$= \frac{\mu_0\omega\sigma}{2} z \underbrace{\int_0^\alpha \frac{\sin^3\theta}{\cos^2\theta}d\theta}_{= \int_0^\alpha \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}d\theta - \int_0^\alpha \sin\theta\, d\theta = \left[\frac{1}{\cos\theta}\right]_0^\alpha + \left[\cos\theta\right]_0^\alpha} \qquad \text{avec } \sin^3\theta = (1-\cos^2\theta)\sin\theta$$

$$= \frac{\mu_0\omega\sigma}{2} z\left[\frac{1}{\cos\alpha} + \cos\alpha - 2\right]$$

en fonction de α

$$= \frac{\mu_0\omega\sigma}{2} R\left[\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha} - \frac{2\cos\alpha}{\sin\alpha}\right] = \frac{\mu_0\omega\sigma R}{2}\left[\frac{(1-\cos\alpha)^2}{\sin\alpha}\right]$$

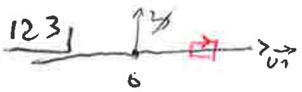
en fonction de z

$$= \frac{\mu_0\omega\sigma}{2}\sqrt{z^2+R^2}\left[1 + \frac{z^2}{z^2+R^2} - \frac{2z}{\sqrt{z^2+R^2}}\right]$$

121 Tout plan contenant M et (Oz) est d'antisymétrie $\quad \vec{B} = B_r(r,z)\vec{u_r} + B_z(r,z)\vec{u_z}$

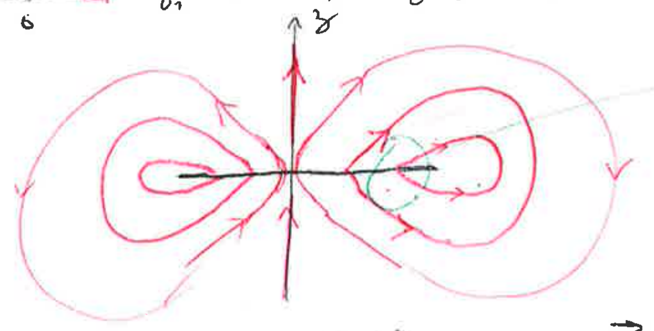
122 (Oxy) plan de symétrie donc $B_z(z)$ paire $\quad B_r(z)$ impaire

(Oxz) plan d'antisymétrie $\quad B_z(r)$ paire $\quad B_r(z)$ impaire

123 

$B_r(r,0^+) = \dfrac{\mu_0}{2}(\vec{j_s}\cdot\vec{u_\theta}) = \dfrac{\mu_0\sigma\omega r}{2}$

124



discontinuité de $B_{/\!/}$

125 $\vec{A} = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{\vec{m}\times\vec{r}}{r^3}$ $\qquad \vec{B} = \dfrac{\mu_0}{4\pi r^3}\left(3(\vec{m}\cdot\vec{u_r})\cdot\vec{u_r} - \vec{m}\right)$ en far field

126

sur l'axe $\vec{B} = \dfrac{\mu_0}{2\pi z^3} m_z$

on identifie quand $z \gg R$, $\alpha \ll 1$: $B \approx \dfrac{\mu_0\omega\sigma R}{2}\dfrac{\left(\frac{1}{2}\alpha^2\right)^2}{\alpha} = \dfrac{\mu_0\omega\sigma R}{8}\dfrac{R^3}{z^3}$ $\Big\}$ $m_z = \dfrac{\pi\omega\sigma R^4}{4}$

131) $\vec{E} = E_z \vec{u}_z$ sur l'axe car (Oz) axe de sym de $\rho(\vec{r})$

132) $E_z = \vec{u}_z \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int \rho(\vec{r}\,') \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3} d^3r'$

$$= \vec{u}_z \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int_{0,0}^{R,2\pi} \sigma \frac{(z\vec{u}_z - r'\vec{u}_r)}{(z^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}} r'dr'd\theta$$

$$= \frac{\sigma z}{4\pi\varepsilon_0} \times 2\pi \underbrace{\int_0^R \frac{r'dr'}{(z^2+r'^2)^{\frac{3}{2}}}} \qquad \left[-(z^2+r'^2)^{-\frac{1}{2}}\right]_0^R$$

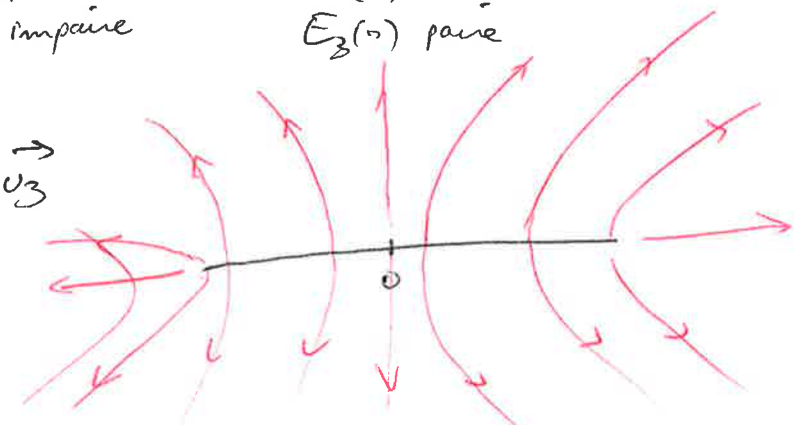
$$= \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}}\right)$$

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(1-\cos\alpha)\,\vec{u}_z \quad \text{sur l'axe}$$

141) $\vec{E} = E_r(r,z)\,\vec{u}_r + E_z(r,z)\,\vec{u}_z$ hors axe

avec $E_r(z)$ paire $\qquad E_r(r)$ impaire
$E_z(z)$ impaire $\qquad E_z(r)$ paire

142) $\vec{E}(z=0^+, r) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{u}_z$



144) En champ lointain $V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ avec $Q = \pi R^2 \sigma$

151) si $r<R$ $V=V_0$ si $r>R$ $V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ donc $V_0 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

152) $Q = 4\pi\varepsilon_0 R V_0 = 1{,}1 \; 10^{-7}$ C

153) $\sigma = \frac{Q}{\pi R^2}$

$$B(0,0^+) = \frac{\mu_0 \omega}{2}\sigma R = \frac{\mu_0 2\pi f}{2}\frac{Q}{\pi R} = \frac{\mu_0 Q f}{R} = 1{,}39 \; 10^{-10} \text{ T}$$