Partiel d'Électromagnétisme
29 Octobre 2024

Durée 3h. Documents, téléphones portables... non autorisés. Calculatrice autorisée.

Les quantités vectorielles sont notées en caractères gras. On pourra prendre pour les applications numériques les approximations : $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ T.m.A^{-1} et $c = 3.10^8$ m.s^{-1}

1 Exercice 1 - Diélectrique sphérique

On considère une boule de gaz polarisable de rayon R et de constante diélectrique ε_r. On ajoute dans cette boule des charges libres avec une densité volumique de charges uniforme ρ_l.

1. Calculer à l'aide des symétries du système, que vous expliciterez, et du théorème de Gauss, le champ $\mathbf{D}(\mathbf{r})$.
2. En déduire l'expression de $\mathbf{P}(\mathbf{r})$.
3. Montrez que $\nabla \cdot \mathbf{r} = 3$.
4. Calculer la densité volumique de charge de polarisation.
5. Calculer la densité surfacique de charge de polarisation.
6. Confirmez explicitement, que l'ensemble des charges de polarisation s'additionnent à la valeur attendue que vous préciserez en le justifiant.

2 Exercice 2 - Expérience de Rowland

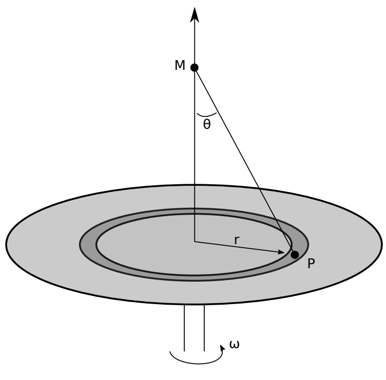

Figure 1 – Principe de l'expérience de Rowland

Un disque infiniment fin de rayon R porte la densité surfacique de charge uniforme σ. Ce disque est mis en rotation à la vitesse angulaire constante ω autour de son axe $(0z)$.

2.1 Champ B sur l'axe

1. Par des arguments de symétrie donner la direction du champ magnétique sur l'axe.
2. Montrer qu'une couronne de rayon r et de largeur dr est équivalente à une spire portant un courant $dI = \sigma\omega r dr$
3. Exprimer le champ magnétique $d\mathbf{B}$ créé au point M d'abcisse z par cette spire. Montrer que ce champ est proportionnel à $\sin^3\theta$.

4. Donner l'expression du champ magnétique total créé par le disque en rotation, sur l'axe, en fonction de l'angle $\alpha = \theta_{max}$ tel que $\tan\alpha = R/z$.

2.2 Champ B hors axe

1. Par des arguments de symétrie, donner l'expression générale des composantes non-nulles du champ magnétique hors de l'axe.
2. Quelles sont les parités des composantes de $\mathbf{B}$ en fonction de r et de z.
3. A la surface du disque, en $z = 0^+$ et pour $r < R$, donner l'expression de la composante radiale du champ magnétique
4. Tracer l'allure des lignes de champ magnétique autour du disque, sans trop vous attarder sur les difficultés au bord du disque.
5. En champ lointain, donner l'expression générale du potentiel vecteur.
6. On rappelle que le champ magnétique créé par un dipole est $\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3}(3(\mathbf{m}.\mathbf{u_r})\mathbf{u_r} - \mathbf{m})$ en champ lointain. Par identification sur l'axe (Oz) calculer le moment magnétique $\mathbf{m}$ du disque en rotation.

2.3 Champ E sur l'axe

1. Par des arguments de symétrie donner la direction du champ électrique sur l'axe.
2. Donner l'expression du champ électrique total créé par le disque, sur l'axe.

2.4 Champ E hors axe

1. Par des arguments de symétrie, donner l'expression générale des composantes non-nulles du champ électrique hors de l'axe.
2. A la surface du disque, en $z = 0^+$ et pour $r < R$, donner l'expression de la composante axiale du champ électrique.
3. Tracer l'allure des lignes de champ électrique autour du disque, sans trop vous attarder sur les difficultés au bord du disque.
4. En champ lointain, donner l'expression du potentiel scalaire.

2.5 Application numérique

On suppose que le disque est chargé à 10000V. Pour trouver un ordre de grandeur de la charge porté par le disque, on prend le modèle d'une sphère.

1. Donner le potentiel dans tout l'espace créé par une boule conductrice de rayon R portant la charge totale Q.
2. Donner la charge Q (et sa valeur numérique) portée par une boule conductrice chargée à 10 kV.
3. En gardant cette valeur de charge pour le cas d'un disque de rayon 10cm tournant à 100 tours/s, donner la valeur numérique du champ magnétique sur l'axe en $z = 0+$. Comparer cette valeur aux 47 µT du champ magnétique terrestre. Quelles précautions expérimentales mettre en oeuvre pour reproduire l'expérience de Rowland ?

3 Problème - Réflexion sur un miroir mobile.

Les parties 3.1 et 3.2 sont indépendantes.

On se propose d'étudier, dans le référentiel du laboratoire, quelques propriétés de la réflexion d'une onde plane sur un miroir mobile parfaitement réfléchissant en utilisant uniquement les équations de Maxwell.

On admet que dans le cas d'une interface infiniment fine, se déplaçant à une vitesse fixe $\mathbf{v}$ dans le vide, porteuse d'une densité surfacique de charge ρ_S et d'une densité de courant surfacique $\mathbf{j}_S$ les conditions de passage des champs électromagnétiques dans le vide sont :

$$\mathbf{n}_{1\to2} \cdot (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \frac{\rho_s}{\varepsilon_0} \tag{1}$$

$$\mathbf{n}_{1\to2} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \tag{2}$$

$$\mathbf{n}_{1\to2} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{1\to2})(\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \tag{3}$$

$$\mathbf{n}_{1\to2} \times (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) + \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{1\to2})}{c^2}(\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = \mu_0 \mathbf{j}_s \tag{4}$$

où $\mathbf{E}_i$ ($\mathbf{B}_i$) est le champ électrique (magnétique) défini dans le demi espace i ($i = 1, 2$) et $\mathbf{n}_{1\to2}$ le vecteur normal à la surface dirigée du demi espace 1 vers le demi espace 2.

On considère un miroir parfaitement réfléchissant se déplaçant à la vitesse constante $\mathbf{v} = v\mathbf{u}_z$ et occupant le demi espace $z < 0$ à l'instant $t = 0$. Le plan d'incidence est le plan (xOz).

3.1 Onde plane en incidence oblique transverse électrique.

On considère une onde plane $\mathbf{E}_i = \frac{1}{2}\Re\left[E_i \exp\left(i(\omega_i t - \mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r})\right) \boldsymbol{u}_y\right]$ incidente sur le miroir avec un angle d'incidence θ_i. E_i, ω_i, $\mathbf{k}_i$, sont respectivement l'amplitude complexe de l'onde incidente, sa pulsation et son vecteur d'onde tel que $k_i = \omega_i/c$. L'angle de réflexion sera noté θ_r. À l'instant t, le miroir se trouve à la position $z = vt$ et les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ sont donc nuls dans le demi-espace $z < vt$.

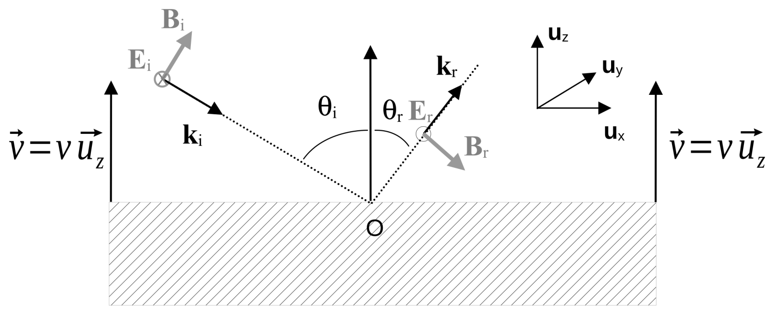

FIGURE 2 – Onde en incidence oblique TE ($\mathbf{E}$ est parallèle à $\mathbf{u}_y$)

1. Par des arguments de symétrie, justifier que le champ $\mathbf{E}$ de l'onde réfléchie est bien selon $\mathbf{u}_y$. Le champ électrique de l'onde réfléchie est notée, de manière analogue à l'onde incidente, $\mathbf{E}_r = \frac{1}{2}\Re\left[E_r \exp\left(i(\omega_r t - \mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r})\right) \boldsymbol{u}_y\right]$.
2. Calculer le champ $\mathbf{B}_i$ de l'onde incidente en fonction de E_i, ω_i, et des composantes de $\mathbf{k}_i = (k_{ix}, 0, k_{iz})$, ainsi que le champ $\mathbf{B}_r$ de l'onde réfléchie en fonction de E_r, ω_r, et des composantes de $\mathbf{k}_r = (k_{rx}, k_{ry}, k_{rz})$.

3. À partir d'une des équations de continuité (et une seule) écrire une relation vérifiée par les phases, $\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$, des ondes incidentes et réfléchie. Vous indiquerez clairement la ou les relations qui permettent d'arriver au résultat et celle que vous avez choisi et pourquoi.
4. Justifier que l'onde réfléchie est dans le plan d'incidence. On notera par la suite : $\mathbf{k}_i = \frac{\omega_i}{c}(\sin\theta_i, 0, -\cos\theta_i)$ et $\mathbf{k}_r = \frac{\omega_r}{c}(\sin\theta_r, 0, \cos\theta_r)$.
5. En déduire une relation entre ω_i, ω_r, $\sin\theta_i$ et $\sin\theta_r$ ainsi qu'une relation entre ω_i, ω_r, $\left(1 + \frac{v}{c}\cos\theta_i\right)$ et $\left(1 - \frac{v}{c}\cos\theta_r\right)$.
6. Montrer que : $\omega_r = \omega_i \frac{(1+v^2/c^2)+2v/c\cos\theta_i}{1-v^2/c^2}$. Quel est le nom de cet effet ? *Indication pour le calcul : vous isolerez* $\frac{v}{c}\cos\theta_r$*, dans la deuxième équation obtenue à la question 5. Puis, vous éliminerez de l'équation obtenue* $\cos\theta_r$ *pour obtenir une équation du second degré pour* ω_r *en fonction de* ω_i *et* $\cos\theta_i$. Vous montrerez que la deuxième solution de l'équation du second degré obtenue ne correspond pas à la physique du problème.
7. Calculer l'angle de réflexion en fonction de l'angle d'incidence.
8. Un téléphone GSM (2G) immobile, reçoit un signal en provenance d'une station de base fixe émettant à 900 MHz après avoir subi une réflexion sur un TGV se déplaçant à 300 km.h^{-1}. La norme GSM prévoyait initialement une tolérance en fréquence de 0,1 partie par million sur les signaux émis ou reçus. Justifiez que la transmission s'effectuera correctement ou pas dans cette configuration ? Toujours pour cette même onde, donner l'ordre de grandeur, en radian, de l'écart par rapport à la loi de Snell-Descartes lors de la réflexion sur le TGV. Commentez.

3.2 Onde plane en incidence normale. Amplification.

On se place maintenant dans le cas de l'incidence normale et on cherche à calculer le vecteur de Poynting réfléchi, $\mathbf{\Pi}_r$ en fonction de celui incident sur le miroir mobile, $\mathbf{\Pi}_i$.

Pour cela on considère un disque élémentaire A placé dans le métal à une distance infiniment faible de la surface ainsi qu'un cylindre droit de hauteur $L(t)$, variant au cours du temps, et s'appuyant sur A et un disque A' situé sur un plan de référence fixe. Le miroir se déplace comme précédemment à la vitesse $\mathbf{v} = v\mathbf{u}_z$.

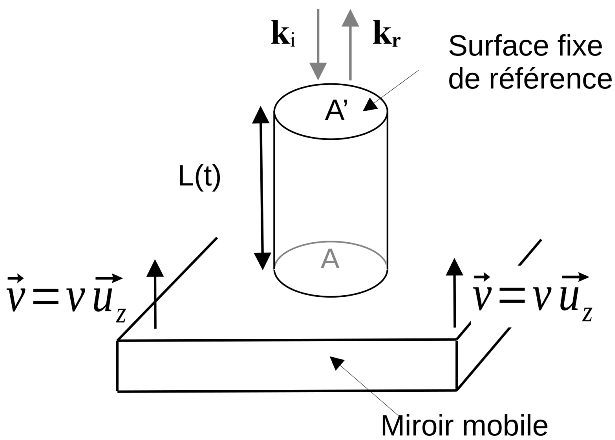

FIGURE 3 – Onde en incidence normale. ($\mathbf{E}$ est parallèle à $\mathbf{u}_y$)

1. On se propose, en utilisant la conservation de l'énergie, d'établir une première relation donnant $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$, en fonction de $\mathbf{\Pi}_i$ et $\mathbf{\Pi}_r$, où $\mathbf{F}$ est la force exercée par le champ sur la surface A du miroir mobile.

(a) Écrire le théorème de Poynting pour le cylindre s'appuyant sur A et A' dans lequel on fera apparaître la puissance fournie au miroir $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ et les modules des vecteurs de Poynting $\|\mathbf{\Pi}_i\|$ et $\|\mathbf{\Pi}_r\|$.

(b) Montrer que l'énergie électromagnétique associée à l'onde incidente et contenue dans le cylindre de base A et de longueur L est donnée par $U_i = AL\frac{\|\mathbf{\Pi}_i\|}{c}$. Établir une relation analogue pour U_r. En déduire le taux de variation d'énergie totale par unité de temps $\frac{d(U_i+U_r)}{dt}$.

(c) Conclure sur la valeur de $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ en fonction de $\mathbf{\Pi}_i$ et $\mathbf{\Pi}_r$.

2. On se propose ici de calculer la force $\mathbf{F}$ exercée sur une surface A du miroir en fonction de $\mathbf{\Pi}_i$ et $\mathbf{\Pi}_r$ en utilisant la conservation de la quantité de mouvement du champ électromagnétique.

   (a) Rappeler la valeur de la densité de quantité de mouvement par unité de volume d'un champ électromagnétique en fonction du vecteur de Poynting $\mathbf{\Pi}$.

   (b) L'onde électromagnétique se propageant à la vitesse c, quelle est la quantité de mouvement par unité de temps incidente sur la surface A ? Quelle est la quantité de mouvement par unité de temps réfléchie par la surface A ? En déduire le taux de variation de la quantité de mouvement du champ électromagnétique du fait de la seule réflexion : $\frac{dp_{\mathrm{EM}}}{dt}$.

   (c) Calculer la quantité de mouvement stockée dans le cylindre de base A et de hauteur L en fonction de $\mathbf{\Pi}_i$ et $\mathbf{\Pi}_r$. En déduire le taux de variation de la quantité de mouvement du champ électromagnétique du fait de la réduction du volume entre la surface A et A' lors du déplacement du miroir.

   (d) Montrer que la force $\mathbf{F}$ exercée par le champ sur la surface A est donnée par :

$$\mathbf{F} = -A\left[\frac{\|\mathbf{\Pi}_i\| + \|\mathbf{\Pi}_r\|}{c} + \frac{v}{c}\frac{\|\mathbf{\Pi}_i\| - \|\mathbf{\Pi}_r\|}{c}\right]\mathbf{u}_z$$

3. Déduire de la question précédente 2(d) et de l'expression de $\mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$ obtenue au 1(c) que $\frac{\|\mathbf{\Pi}_r\|}{\|\mathbf{\Pi}_i\|} = \left(\frac{1+v/c}{1-v/c}\right)^2$.

4. Commenter la possibilité d'amplifier une onde électromagnétique de 1% grâce à un miroir mobile.