Feuille 3

Exercice 5, séries b et c.

Déterminer les rayons de convergence, puis la somme des séries suivantes

- $b(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{n+2}{n+1}x^n$

Indication pour le calcul de la somme : écrire

$$\frac{n+2}{n+1}=\frac{n+1+1}{n+1}=1+\frac{1}{n+1}$$

- Calcul du rayon de convergence : $b(x)=\sum_{n\geq 0}a_n x^n$ avec $a_n=\frac{n+2}{n+1}\neq 0$ et $\lim_{n\to+\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=1$ (il suffit de remarquer que $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$) donc $R=\frac{1}{1}=1$.

- La fonction somme $b(x)=\sum_{n\geq 0}\frac{n+2}{n+1}x^n$ est bien définie sur l'intervalle $]-1,1[$.

- En écrivant $\frac{n+2}{n+1}=1+\frac{1}{n+1}$ on obtient

$$b(x)=\sum_{n\geq 0}x^n+\sum_{n\geq 0}\frac{1}{n+1}x^n, \quad \forall x\in]-1,1[$$

séries de rayon de convergence 1, elles convergent sur $]-1,1[$ et leur somme est $b(x)$

On utilise ici le résultat suivant sur les séries numériques :

Si $\sum_{n\geq 0}\alpha_n$ CV et $\sum\beta_n$ CV alors la série somme $\sum_{n\geq 0}(\alpha_n+\beta_n)$ CV

et $\sum_{n\geq 0}(\alpha_n+\beta_n)=\left(\sum_{n\geq 0}\alpha_n\right)+\left(\sum_{n\geq 0}\beta_n\right)$

• D'une part $\displaystyle\sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$ sur $]-1,1[$

(somme d'une série géométrique)

• Pour calculer $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n+1}$ on peut utiliser le développement en série entière de $\ln(1-x)$:

$$\boxed{-\ln(1-x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n} \,, \text{ si } x \in]-1,1[}$$

↑ formule à connaître !! (et très facile à établir : on le fait à la fin de l'exercice)

Si $x \in]-1,1[$ et $x \neq 0$ on a

$$\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n+1} = \frac{1}{x} \sum_{n\geq 0} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$= \frac{1}{x} \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n} = -\frac{\ln(1-x)}{x}$$

Si $x = 0$ $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n+1} \underset{x^0=1}{\overset{\uparrow}{=}} 1$

Remarque : $\ln(1-x) \underset{0}{\sim} -x$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{-\ln(1-x)}{x} = 1$ mais ce calcul n'est pas nécessaire car $S(x) = \displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n+1}$ est continue (et même C^∞) sur $]-1,1[$ (son rayon de cv est 1) donc $\underset{\text{calcul direct}}{1 = S(0)} = \displaystyle\lim_{x\to 0} S(x)$ par continuité en 0.

• Finalement, si $x \in]-1,1[$ on obtient

$$b(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{\ln(1-x)}{x} \quad \text{si } x \neq 0 \quad \text{et}$$

$$b(0) = 2 \text{ (calcul direct)}$$

Démonstration du développement en série entière :

$$\boxed{-\ln(1-x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}, \quad \text{si } x \in]-1,1[}$$

Le rayon de cv de la série entière $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$ est $R=1$ (d'Alembert). On sait alors que la fonction somme

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$$ est bien définie sur $]-1,1[$,

dérivable et $f'(x) = \sum_{n\geq 1} \left(\frac{x^n}{n}\right)' =$

$$= \sum_{n\geq 1} \frac{n x^{n-1}}{n} = \sum_{n\geq 1} x^{n-1} = \sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Ainsi $f(x) = -\ln(1-x) + C$ sur $]-1,1[$

Comme $f(0) = 0$ et $-\ln(1-0) = 0$ on a

$C = 0$ ce qui termine la démonstration.

- $c(x) = \sum_{n\geq 0} \frac{n-1}{n!} x^n$ Indication : pour calculer la somme, utiliser le développement en série entière de $x \to e^x$ sur $\mathbb{R}$ (voir Poly, Ch 2, page 11). Encore un résultat à retenir !!

$$\boxed{e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}}$$

- Calcul du rayon de convergence

On applique la règle de d'Alembert : Si $n \geq 2$

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left(\frac{n}{(n+1)!} \right) \cdot \left(\frac{n!}{n-1} \right) = \frac{n}{(n+1)(n-1)} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

et $R = +\infty$

- Calcul de la somme. La fonction somme

$c(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{n-1}{n!} x^n$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

On a $c(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{n}{n!} x^n - \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} x^n =$

⚠ l'égalité est justifiée $\forall x \in \mathbb{R}$ car les deux séries entières du second membre ont un rayon de convergence infini (vérifier)

Ne pas oublier que $0! = 1$ et $x^0 = 1$

$$= \sum_{n \geq 1} \frac{n}{n!} x^n - e^x = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{(n-1)!} x^n - e^x$$

$$= x \sum_{n \geq 1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - e^x$$

$$= x \sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!} - e^x = x e^x - e^x$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.