Feuille 3 Exercice 3

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ une série entière de rayon de cv $R_1 > 0$

Déterminer le rayon de cv $R_2$ de $\sum_{n\geq 0} a_n x^{2n}$

1) En remarquant que $x^{2n} = (x^2)^n$ on obtient :

La série $\sum a_n x^{2n}$ $\begin{cases} \text{cv abs} \\ \text{converge} \\ \text{diverge} \end{cases}$ en $x = x_0$

$\iff$ La série $\sum a_n x^n$ $\begin{cases} \text{cv abs} \\ \text{converge} \\ \text{diverge} \end{cases}$ en $x = x_0^2$

2) Soit $x_0 \in ]-\sqrt{R_1}, \sqrt{R_1}[$, alors

$x_0^2 \in [0, R_1[ \subset ]-R_1, R_1[$ et la

série $\sum a_n x^n$ (de rayon $R_1$) cv abs en $x = x_0^2$.

Donc (d'après 1)) la série $\sum a_n x^{2n}$ cv abs

en $x = x_0$. Ceci montre que $R_2 \geq \sqrt{R_1}$

3) Si $|x_0| > \sqrt{R_1}$, alors $x_0^2 > R_1$ et
la série $\sum a_n x^n$ (de rayon $R_1$) diverge
en $x = x_0^2$, c'est-à-dire que la série

$\sum a_n x^{2n}$ diverge en $x = x_0$. On a donc $R_2 \leq \sqrt{R_1}$

Conclusion : $R_2 = \sqrt{R_1}$