Feuille 3

Exercice 1 d), e), f)

Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

(d) $$\sum_{n\geq 1} \underbrace{\left(\tan\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)}_{a_n} x^n$$

On va chercher un équivalent simple de a_n

On sait que

$$\tan(u) = u + \frac{u^3}{3} + u^3 \varepsilon(u)$$

$$\sin(u) = u - \frac{u^3}{6} + u^3 \varepsilon(u)$$

Par conséquent,

$$a_n = \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{n^3}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{6n^3} + \frac{1}{n^3}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2n^3} + \frac{1}{n^3}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) \quad \text{et} \quad a_n \sim \frac{1}{2n^3}$$

On applique la règle de d'Alembert :

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \sim \frac{2n^3}{2(n+1)^3} \quad \text{d'où} \quad L = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$$

et le rayon de convergence est $R = \frac{1}{L} = 1$.

(e) $$\sum_{n\geq 1} \underbrace{e^{-n^2}}_{a_n} x^n$$

On applique la règle de Cauchy :

$$|a_n|^{1/n} = \left(e^{-n^2}\right)^{1/n} = e^{-n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{et}$$

le rayon de convergence est $R = +\infty$

(8) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^{2n}$ (S)

Fixons x et appliquons la règle de Cauchy (pour les séries numériques) à la série de terme général

$$u_n = \left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^{2n}\right| = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} |x|^{2n} \geq 0$$

$$u_n^{1/n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} |x|^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} e|x|^2$$

- Si $|x| < \frac{1}{\sqrt{e}}$, on a $e|x|^2 < 1$ et $\sum u_n$ cv.

  Par conséquent notre série entière (S) cv absolument si $|x| < \frac{1}{\sqrt{e}}$ (ce qui implique que son rayon de convergence R vérifie $R \geq \frac{1}{\sqrt{e}}$)

- Si $|x| > \frac{1}{\sqrt{e}}$, alors $e|x|^2 > 1$ et $\sum u_n$ diverge :

  La série entière (S) ne cv pas absolument si $|x| > \frac{1}{\sqrt{e}}$, donc $R \leq \frac{1}{\sqrt{e}}$

- Conclusion : $R = \frac{1}{\sqrt{e}}$

Remarque : Notre série entière (S) s'écrit $\sum a_n x^n$

avec $a_{2k} = \left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2}$ et $a_{2k+1} = 0$:

$\lim\limits_{n\to+\infty} |a_n|^{1/n}$ n'existe pas puisque, d'une part

$$\lim_{k \to +\infty} |a_{2k+1}|^{\frac{1}{2k+1}} = 0$$ et, d'autre part

$$\lim_{k \to +\infty} |a_{2k}|^{\frac{1}{2k}} = \lim_{k \to +\infty} \left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k^2} \right)^{\frac{1}{2k}}$$

$$= \lim_{k \to +\infty} \left(\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$$

Les suites extraites d'indices pair et impair de la suite $\left(|a_n|^{\frac{1}{n}}\right)_{n \geq 1}$ ne convergent pas vers la même limite.