Évolution des conceptions de l'Univers (Phys137)

TD 6

Exercice 1 : quelques applications simples

1. Déterminer la dimension de la constante de Planck, h, et vérifier la dimension de λ avec l'équation reliant λ, h et p.

$E = h\nu$ => $[h] = ML^2T^{-2}/T^{-1} = ML^2T^{-1}$

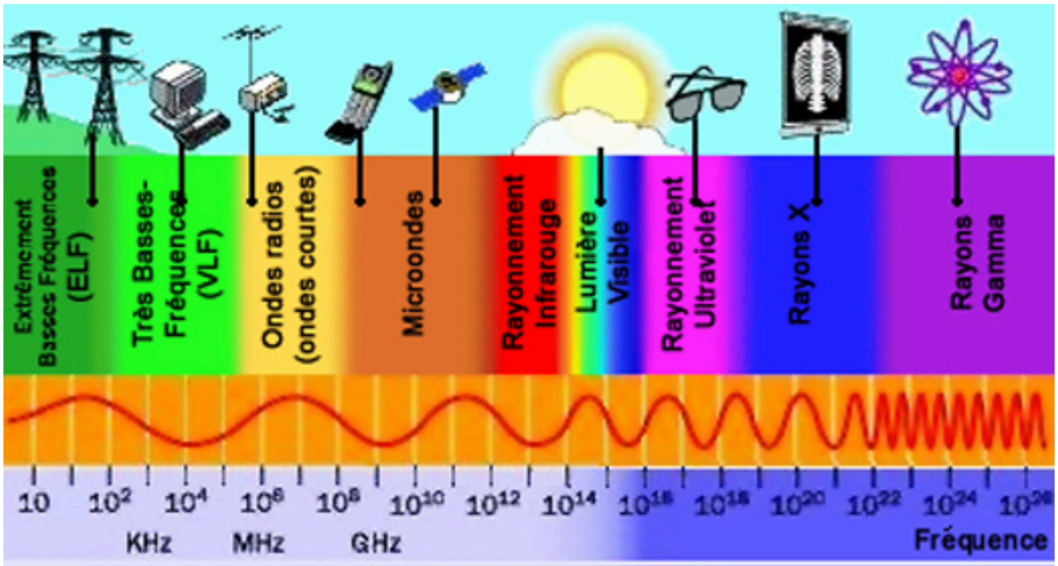
$\lambda = h/p$ => $[\lambda] = ML^2T^{-1}/MLT^{-1} = L$

2. Quelle est la longueur d'onde associée à un électron se déplaçant à c/100 ? Et celle d'un proton à la même vitesse ?

$\lambda_e = h/m_e v$ => $\lambda_e = 2{,}4.10^{-10}$ m

$\lambda_p = h/m_p v$ => $\lambda_p = 1{,}3.10^{-13}$ m

3. À partir des données de la Fig.1, calculer l'énergie (en eV) d'un photon infra-rouge, visible (jaune), ultra-violet et X. Sachant que l'énergie d'ionisation de l'hydrogène depuis l'état fondamental vaut 13,6 eV, quelles conséquences en tirer ?



ν_{IR} = 10^{13} GHz => E_{IR} = 0,04 eV

ν_{Vis} = 10^{15} GHz => E_{Vis} = 4,14 eV

ν_{UV} = 10^{17} GHz => E_{UV} = 414 eV

ν_X = 10^{20} GHz => E_X = 414 keV

Dès les UV faibles, attention aux conséquences du rayonnement.

4. On considère un électron en orbite dans un atome d'hydrogène dont l'ordre de grandeur de la taille est $\Delta x \simeq 10^{-10}$ m. Quelle est l'incertitude sur sa vitesse ?

$\Delta x \Delta p \sim \hbar/2 \Rightarrow \Delta v = \dfrac{h}{4\pi m_e \Delta x} =$ 579 km/s !!!

5. Dans le cadre des fluctuations quantiques du vide qui génère la création-annihilation de paires particule-antiparticule, on considère la création d'une paire électron-antiélectron. Quelle est l'ordre de grandeur de la durée de cette fluctuation ?

$\Delta E \Delta t \sim \hbar/2 \Rightarrow \Delta t = \dfrac{h}{8\pi m_e c^2} =$ 3,2.10^{-22} s.

Exercice 2 : fonction d'onde

On considère une particule dans un puits de potentiel infini à une dimension $V(x)$, de largeur L :

$V(x) = 0$ si $0 \leq x \leq L$
$V(x) = +\infty$ si $x < 0$ ou $x > L$

On se place dans le cas stationnaire (la particule est prisonnière du puits de potentiel), l'équation de Schrödinger s'écrit alors :

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\phi(x)}{dx^2} + V(x)\phi(x) = E\phi(x)$$

Lorsque le potentiel est infini, on se doute intuitivement que la particule ne peut y être présente, donc $\phi(x) = 0$.

1. Vérifier que $\phi(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx)$ est une solution pour $0 \leq x \leq L$ et déduire la valeur de E.

$$\frac{d\phi}{dx} = Ak\cos(kx) - Bk\sin(kx)$$

$$\frac{d^2\phi}{dx^2} = -Ak^2\sin(kx) - Bk^2\cos(kx) = -k^2\phi$$

On a bien $\dfrac{k^2\hbar^2}{2m}\phi(x) = E\phi(x)$ et donc $E_k = \dfrac{k^2\hbar^2}{2m}$

2. A partir des conditions aux limites et de la continuité de ϕ déduire les valeurs de A et B et celle de l'énergie E.

$\phi(0) = 0$ impose $B = 0$.

$\phi(L) = 0$ impose $k = n\pi/L$. Donc $E_n = \dfrac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$. L'énergie est quantifié par n !

Exercice 3 : effet photo-électrique

On considère une plaque recouverte de sodium. Expérimentalement, on mesure que des électrons commencent à être arrachés sous un rayonnement de fréquence ν=5,1.10^{14} Hz.

1. Calculer l'énergie d'extraction des électrons.

$E_{ext} = h\nu =$ 3,37.10^{-19} J = 2,11 eV

2. On utilise ensuite un rayonnement de longueur d'onde $\lambda =$ 0,4 µ. Quelle sont l'énergie cinétique et la vitesse maximales d'un électron ?

$E_{C,max} = hc/\lambda - E_{ext} =$ 1,6.10^{-19} J

$v_{max} = \sqrt{2E_{C,max}/m} =$ 590 km/s

3. Comparer cette vitesse à celle de l'agitation thermique, sachant que celle-ci correspond à une énergie cinétique $E_{C,therm} = 3k_BT/2$ où k_B est la constante de Boltzmann et T la température (en K), qui vaut ici 300 K.

$3k_BT/2 = mv^2/2 \Rightarrow v = \sqrt{3k_BT/m} =$ 117 km/s

Exercice 4 : la "catastrophe ultra-violette"

En se basant sur la mécanique statistique et l'électromagnétisme classique, J. Rayleigh établit une loi (corrigée plus tard par J. Jeans) qui donne la luminance spectrale d'un corps noir en fonction de sa température et de la longueur d'onde du rayonnement :

$$L_{RJ}(T) = \frac{2ck_BT}{\lambda^4}$$

1. A partir des unités de chacun de ces termes, déterminer la dimension de $L_\lambda(T)$. Comparer à une puissance par unité de surface et par unité de longueur d'onde.

$$[L_{RJ}] = \frac{LT^{-1}ML^2T^{-2}K^{-1}KT^{-2}}{L^4} = ML^{-1}T^{-3}$$

La dimension d'une puissance est $[P] = [E/T] = ML^2T^{-3}$. La dimension de $[L_{RJ}]$ correspond à une puissance par unité de surface et par unité de longueur d'onde.

2. On rappelle la formule décrivant $L_\lambda(T)$ pour le corps noir :

$$L_\lambda(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{e^{hc/\lambda k_B T} - 1}$$

Montrer que pour les faibles énergies, la loi de Rayleigh-Jeans est une approximation de la loi du corps noir.

L'énergie est $E = h\nu = hc/\lambda$. Si $hc\lambda \ll k_BT$, alors $e^{hc/\lambda k_B T} \rightarrow 1 + hc/\lambda k_B T$ et $L_\lambda(T) \rightarrow \frac{2hc^2}{\lambda^5}\frac{\lambda k_B T}{hc} = \frac{2ck_BT}{\lambda^4} = L_{RJ}$.

Exercice 5 : taille atomique

Pour estimer la taille d'un atome d'hydrogène, on va se ramener à une dimension et supposer que l'électron est délocalisé sur une région de taille a = Δx. Cet électron est soumis à un potentiel électrostatique dû au noyau qui correspond à une énergie potentielle $U = -K/x$ où $K = \frac{e^2}{16\pi\epsilon_0}$ (donné ici sans unité) où e est la charge de l'électron et ϵ_0 la permittivité du vide.

Rappel : l'écart-type d'une valeur quelconque y vaut $\Delta y = \sqrt{<y^2> - <y>^2}$

0. Quelle est l'unité de K ?

[U] = énergie en Joule, [x] = longueur en m, donc [K] = J.m

1. Déterminer l'écart-type de la quantité de mouvement Δp de l'électron à partir de la relation d'Heisenberg.

Relation d'Heisenberg : $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2 \Rightarrow \Delta p \simeq \hbar/2a$

2. Estimer l'énergie (somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle) moyenne de l'électron, sachant que l'électron "tourne autour" du noyau (on considérera alors que $\Delta x \simeq a$ et que $<v> = 0$ ce qui permet d'estimer $<p^2>$).

$E = E_C + U = \frac{p^2}{2m} - \frac{K}{x}$. On estime les valeurs moyennes : $<\Delta x> \sim a$ et $<p^2> \sim \Delta p^2$ car on considère que $<p>=0$ puisque l'électron va dans toutes les directions ($<v>=0$) et d'après la formule de l'écart type, on a $<p^2>=\Delta p^2$.

On obtient alors $<E> = \frac{\Delta p^2}{2m} - \frac{K}{a} \simeq \frac{\hbar^2}{8ma^2} - \frac{K}{a}$

3. Pour déterminer a, on va déterminer sa valeur pour laquelle l'énergie est minimum.

$\frac{dE}{da} = -\frac{2\hbar^2}{8ma^3} + \frac{K}{a^2} = 0 \Rightarrow a = \frac{\hbar^2}{4mK} = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2}$. C'est le rayon de Bohr.

A.N. : $a = 0{,}53.10^{-10}$ m.

****

Données utiles :

h = $6{,}62.10^{-34}$ J.s

k_B = $1{,}38.10^{-23}$ J.K^{-1}

m_e = $9{,}11.10^{-31}$ kg

m_p = $1{,}67.10^{-27}$ kg

1 eV = $1{,}6.10^{-19}$ J

1 J = $6{,}24.10^{18}$ eV

c = 3.10^{8} m/s

ϵ_0 = $8{,}85.10^{-12}$ F.m^{-1}