Université Paris Saclay — **MDD 102**
L1S1 — **Algèbre**

Corrigé du Partiel du 24 octobre 2024

Exercice 1. Question de cours.
Soit R une relation sur un ensemble X. Quelles propriétés doit vérifier R pour être une relation d'équivalence ? On explicitera ces propriétés.
Réponse : La relation R doit être :

- Réflexive : $\forall x \in X \; xRx$
- Symétrique : $\forall x, y \in X \; xRy \Longrightarrow yRx$
- Transitive : $\forall x, y, z \in X \; (xRy \text{ et } yRz) \Longrightarrow xRz$

Exercice 2. Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux énoncés. Montrer que

$$\exists x\,(P(x) \Rightarrow Q(x)) \text{ est équivalent à } (\forall x\, P(x)) \Rightarrow (\exists x\, Q(x))$$

Réponse : En utilisant les équivalences vues dans le cours, on a la suite d'équivalences :

$$\begin{aligned} \exists x\,(P(x) \Rightarrow Q(x)) \\ \exists x\,((\text{non } P(x)) \text{ ou } Q(x)) \\ (\exists x \text{ non } P(x)) \text{ ou } (\exists x\, Q(x)) \\ (\text{non } \forall x\, P(x)) \text{ ou } (\exists x\, Q(x)) \\ (\forall x\, P(x)) \Rightarrow (\exists x\, Q(x)) \end{aligned}$$

Exercice 3.

1. Vrai ou faux. Soient X un ensemble fini et $f : X \to X$ une application. Si f est injective alors f est surjective. On justifiera par un théorème du cours ou un contre-exemple.

   Réponse : C'est vrai. Puisque f est une application entre deux ensembles finis de même cardinal, un théorème du cours nous dit que si f est injective, alors f est bijective, donc en particulier surjective.
2. On considère désormais l'application $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(x) = x^2$.

(a) Est-ce que f est injective ? Surjective ?

Réponse : L'application f est injective car on sait que pour deux réels positifs x et y (et donc en particulier si x et y sont dans $\mathbb{N}$), $x^2 = y^2$ implique $x = y$.
L'application f n'est pas surjective car il existe des entiers naturels qui ne sont pas des carrés d'entiers, par exemple 2.

(b) Construire une application $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}$.

Réponse : On peut construire g en définissant pour tout y dans $\mathbb{N}$:

$$g(y) = \begin{cases} \sqrt{y} \text{ si } y \text{ est un carré d'entier} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

Par construction, g est bien un application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Et on vérifie que $g \circ f = \mathrm{id}$: soit $x \in \mathbb{N}$ et $y = f(x) = x^2$. Alors y est un carré d'entier, donc par définition de g, $g(y) = \sqrt{y} = \sqrt{x^2} = x$ puisque $x \geq 0$: $g(f(x)) = x$.

(c) A-t-on $f \circ g = \mathrm{id}$? On pourra répondre à cette question même sans avoir trouvé explicitement g à la question précédente.

Réponse : Avec l'application g donnée dans la réponse précédente, on a $g(2) = 0$, donc $f(g(2)) = 0^2 = 0 \neq 2$, et $f \circ g \neq \mathrm{id}$.
Autre argument possible, sans avoir explicitement g : si on a $f \circ g = \mathrm{id}$, on sait par un théorème du cours que f est surjective, ce qui n'est pas le cas d'après la question 2a.

Exercice 4. On se donne pour tout l'exercice deux ensembles non-vides X et Y, et une application $f : X \to Y$.

1. Montrer que pour tout sous-ensemble B de Y, $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

   Réponse : Soit $y \in f(f^{-1}(B))$. Par définition, on peut l'écrire $y = f(x)$ avec $x \in f^{-1}(B)$. Or $x \in f^{-1}(B)$ signifie par définition que $f(x) \in B$. Donc $y = f(x) \in B$. On a donc montré $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

On souhaite maintenant montrer que f est surjective si et seulement si pour tout sous-ensemble B de Y, $f(f^{-1}(B)) = B$.

2. Montrer l'implication

$$P \ : \ (f \text{ est surjective}) \Rightarrow (\forall B \in \mathcal{P}(Y),\ f(f^{-1}(B)) = B)$$

   Réponse : On suppose que f est surjective, et on se donne un sous-ensemble B de Y. On a déjà vu dans la question précédente que $f(f^{-1}(B)) \subset B$, il reste donc à montrer l'inclusion réciproque. Soit

$y \in B \subset Y$. Comme f est surjective, on peut trouver $x \in X$ tel que $y = f(x)$. Comme $f(x) = y \in B$, $x \in f^{-1}(B)$. Ainsi, on a trouvé $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$, ce qui signifie que $y \in f(f^{-1}(B))$, et on conclut que $f(f^{-1}(B)) = B$.

3. On considère maintenant l'implication réciproque

$$Q \ : \ (\forall B \in \mathcal{P}(Y),\ f(f^{-1}(B)) = B) \Rightarrow (f \text{ est surjective})$$

   (a) Écrire la contraposée de Q.

   Réponse :

$$(f \text{ n'est pas surjective}) \Rightarrow (\exists B \in \mathcal{P}(Y),\ f(f^{-1}(B)) \neq B)$$

   (b) Prouver la contraposée de Q. Indication : on pourra commencer par considérer un élément $y \in Y \setminus f(X)$.

   Réponse : On suppose que f n'est pas surjective. On peut donc trouver $y \in Y$ tel que $y \notin f(X)$. Cela signifie que y n'a pas d'antécédent par f : $f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$. De plus, $f(\emptyset) = \emptyset$, car les éléments de cet ensemble devraient s'écrire sous la forme $f(x)$, avec $x \in \emptyset$, ce qui est impossible. Donc on a trouvé le sous-ensemble $\{y\}$ de Y qui vérifie $f(f^{-1}(\{y\})) = \emptyset \neq \{y\}$, c'est ce qu'on voulait.

   (c) Conclure.

   Réponse : On sait que la contraposée de Q est équivalente à Q, donc Q est vrai, et P aussi, ce qui donne l'équivalence voulue.

Exercice 5. Soient X et Y deux ensembles finis. On souhaite démontrer la formule $\mathrm{card}(X \times Y) = \mathrm{card}(X) \times \mathrm{card}(Y)$ par une autre méthode que celle du cours. On ne supposera donc pas dans la suite ce résultat déjà connu.

1. On suppose que $\mathrm{card}(X) = 0$. Montrer que $\mathrm{card}(X \times Y) = 0$.

   Réponse : $\mathrm{card}(X) = 0$ siginifie que $X = \emptyset$. Or les éléments de $X \times Y$ sont tous les éléments de la forme (x, y) avec $x \in X$ et $y \in Y$: il n'en existe donc pas, donc $X \times Y = \emptyset$, donc $\mathrm{card}(X \times Y) = 0$.

2. On suppose que $\mathrm{card}(X) = 1$, et on écrit $X = \{a\}$.

   (a) Montrer que l'application $f : Y \to X \times Y$ définie par $f(y) = (a, y)$ est une bijection.

   Réponse : On montre que f est injective : soient y et y' dans Y tels que $f(y) = f(y')$, c'est-à-dire $(a, y) = (a, y')$. Cela implique que $y = y'$ (propriété caractéristique d'un couple) : on a bien f injective.

Puis on montre que f est surjective : soit $(x, y) \in X \times Y$. Cela signifie que $x \in X$, donc $x = a$, et $y \in Y$. On a donc bien $(x, y) = (a, y) = f(y)$: f est surjective.
Donc f est bijective.

(b) En déduire que $\mathrm{card}(X \times Y) = \mathrm{card}(Y)$.

Réponse : On utilise le théorème du cours : f est une bijection entre deux ensembles finis, donc son ensemble de départ et son ensemble d'arrivée ont le même cardinal.

3. On suppose que $\mathrm{card}(X) = n + 1$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On fixe un élément a de X et on pose $X' = X \setminus \{a\}$. Montrer que

$$\mathrm{card}(X \times Y) = \mathrm{card}(X' \times Y) + \mathrm{card}(\{a\} \times Y)$$

Réponse : Clairement $X = X' \cup \{a\}$, et les ensembles X' et $\{a\}$ sont disjoints. On a alors, pour tous x et y :

$$\begin{aligned}
(x, y) \in X \times Y &\Leftrightarrow (x \in X) \text{ et } (y \in Y) \\
&\Leftrightarrow (x \in X' \text{ ou } x \in \{a\}) \text{ et } (y \in Y) \\
&\Leftrightarrow (x \in X' \text{ et } y \in Y) \text{ ou } (x \in \{a\} \text{ et } y \in Y) \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in X' \times Y \text{ ou } (x, y) \in \{a\} \times Y \\
&\Leftrightarrow (x, y) \in (X' \times Y) \cup (\{a\} \times Y)
\end{aligned}$$

De plus, les ensembles $X' \times Y$ et $\{a\} \times Y$ sont disjoints : si $(x, y) \in (X' \times Y) \cap (\{a\} \times Y)$, alors en particulier $x \in X'$ et $x \in \{a\}$, ce qui est impossible.
Sous ces hypothèses, on peut donc conclure par le cours que

$$\mathrm{card}(X \times Y) = \mathrm{card}(X' \times Y) + \mathrm{card}(\{a\} \times Y)$$

4. En utilisant les questions précédentes, démontrer par récurrence sur $\mathrm{card}(X)$ la formule $\mathrm{card}(X \times Y) = \mathrm{card}(X) \times \mathrm{card}(Y)$.

Réponse : On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété : si $\mathrm{card}(X) = n$, alors $\mathrm{card}(X \times Y) = \mathrm{card}(X) \times \mathrm{card}(Y)$.
Initialisation : c'est vrai pour $n = 0$ par la question 1.
Hérédité : on suppose la propriété vraie pour un certain n, et on la montre au rang $n + 1$.
Soit X de cardinal $n + 1$, comme à la quesion 3, on fixe un élément $a \in X$ (possible car $n + 1 \geq 1$), et on considère $X' = X \setminus \{a\}$. La question 3 nous dit que $\mathrm{card}(X \times Y) = \mathrm{card}(X' \times Y) + \mathrm{card}(\{a\} \times Y)$.

Or $\mathrm{card}(X') = n$, donc $\mathrm{card}(X' \times Y) = n \times card(Y)$ par l'hypothèse de récurrence, et d'autre part $\mathrm{card}(\{a\} \times Y) = \mathrm{card}(Y)$ par la question 2. Donc

$$\mathrm{card}(X \times Y) = n \times \mathrm{card}(Y) + \mathrm{card}(Y) = \mathrm{card}(X) \times \mathrm{card}(Y),$$

ce qu'on voulait.