Université Paris-Saclay — **Intégration MDD302**
L3 DD — **2024–2025**

Partiel: 25/10/2024

Durée 2 heures.
Soigner la rédaction et la présentation.
Les documents, y compris sous forme électronique, ne sont pas autorisés.
Les calculatrices, tablettes, ordinateurs, montres connectées, sont interdits. Les téléphones portables, éteints et rangés.

Questions de cours

1. Écrire la définition d'une fonction Lebesgue intégrable f définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[0,+\infty]$, puis à valeurs dans $\mathbb{R}$, et enfin à valeurs dans $\mathbb{C}$, et donner la définition de son intégrale dans les deux derniers cas.
2. En admettant les questions de mesurabilité, montrer que si $f, g \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sont intégrables, et $a, b \in \mathbb{C}$, alors $af + bg$ est intégrable.

Exercice 1. Soit $f \colon]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{t-1}{\ln t}$.

1. Vérifier que f est à valeurs positives et donner ses limites aux bornes de l'intervalle.
2. Justifier que f est intégrable sur $]0,1[$.

Exercice 2. Soit $g \colon [1,+\infty[\to [0,+\infty[$ une fonction continue et bornée. Pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, on pose $f_n(x) = \dfrac{n^2 g(x)}{n^2x^2+1}$, $x \geq 1$.

1. La fonction $x \mapsto \dfrac{g(x)}{x^2}$ est-elle intégrable sur $[1,+\infty[$? (Justifier)
2. Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement et uniformément sur $[1,+\infty[$. Donner l'expression de la limite.
3. Montrer que la suite $(I_n)_{n\geq 1}$ des intégrales $I_n = \displaystyle\int_{[1,+\infty[} f_n \, d\lambda$ converge (dans $[0,+\infty]$) et donner l'expression de la limite I.
4. En déduire $I < +\infty$.

Exercice 3. Soit $a \in]0,+\infty[$ et $s \in \mathbb{R}$. On pose $f(x) = x^{s-1}e^{-ax}$ pour $x \in]0,+\infty[$.

1. (Question de cours) Justifier en faisant la démonstration que f est intégrable sur $[1,+\infty[$.
2. Montrer que f est intégrable sur $]0,1]$ si $s > 0$.
3. Est-ce que f est intégrable sur $]0,1]$ si $s \leq 0$? Pourquoi?

   Pour $s > 0$ et on pose $\Gamma(s) = \displaystyle\int_{]0,+\infty[} x^{s-1}e^{-x} \, d\lambda(x)$.

4. Montrer, en justifiant les étapes du calcul, que $\displaystyle\int_{]0,+\infty[} f(x) \, d\lambda(x) = \frac{\Gamma(s)}{a^s}$ si $s > 0$.
5. Montrer la relation pour $s > 1$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_{]0,+\infty[} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1} \, d\lambda(x).$$