



Prendre en charge l'hétérogénéité des publics en mathématiques

Aurélie Chesnais

Professeure des Universités, Laboratoire Interdisciplinaire de Recherches en Didactique, Education et Formation (LIRDEF), Faculté d'éducation (FDE), Université de Montpellier

Membre du Réseau RE.S.E.I.D.A (Recherches sur la Socialisation, l'Enseignement, les Inégalités et les Différenciations dans les Apprentissages)





La France championne des inégalités d'apprentissages en mathématiques?

- ▶ *« Les élèves issus de milieu socio-économique défavorisé ont [...] 10 fois plus de chance que les élèves issus de milieu socio-économique favorisé de se retrouver parmi les élèves peu performants en mathématiques au PISA 2022.*
- ▶ *La moyenne OCDE [est de] 7 fois plus de chance d'être dans cette situation »*
- ▶ (rapport PISA 2022)



Mes recherches

- Les inégalités scolaires : un point de vue didactique complémentaire du point de vue sociologique
 - La construction des inégalités d'apprentissage au cœur des classes
 - En mathématiques ...
- L'enseignement et l'apprentissage des mathématiques
 - Fonctionnement des pratiques enseignantes et développement professionnel
 - L'effet des pratiques sur les apprentissages
- Des recherches avec une dimension expérimentale
 - À visée à la fois compréhensive et transformative
 - Certaines recherches dans des dispositifs collaboratifs associant chercheurs et enseignants
- Essentiellement sur le début du secondaire (6^{ème}) mais aussi quelques recherche sur le lycée, la maternelle et l'élémentaire

Des hypothèses sur les inégalités scolaires issues des travaux de RESEIDA (1/2)

- « Hypothèse relationnelle » (Bautier et Goigoux, 2004, Rochex et Crinon, 2011)

« la confrontation entre

- les **caractéristiques et les dispositions sociocognitives et socio langagières des élèves [...]**
 - **l'opacité et le caractère implicite** de ces **réquisits**, des **modes de fonctionnement** du système éducatif, des **pratiques professionnelles et des modes de travail** qui y sont mis en œuvre ou exigés des élèves. » (Rochex & Crinon, 2011)
- > génère des « malentendus socio-cognitifs » responsables de difficultés d'apprentissages pour les élèves dont la culture est éloignée de celle de l'école



Des hypothèses sur les inégalités scolaires issues des travaux de RESEIDA (2/2)

- « Différenciation passive »

- Des « *savoirs, des compétences, des modes de faire* » (Rochex et Crinon., p. 91) face auxquels tous les élèves ne sont pas égaux

- « Différenciation active »

- « *[des] modes de faire différenciés selon les caractéristiques – réelles ou supposées – des élèves* » (ibid.)

- Des causes d'inégalités à l'insu des enseignants !



Questions de recherche en didactique des mathématiques

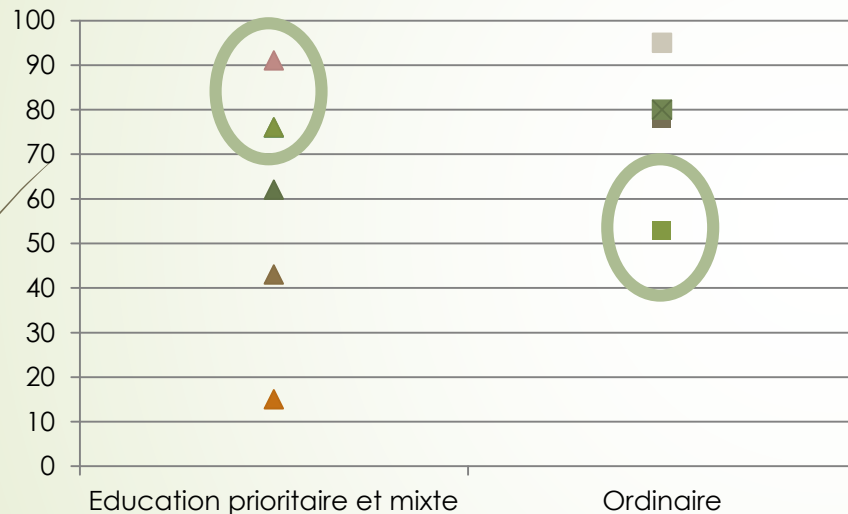
- Quelle forme cela prend-il dans les apprentissages mathématiques ?
 - En particulier la question des compétences langagières
- Peut-on mettre en rapport des caractéristiques des enseignements et des effets en termes d'aggravation ou au contraire de limitation des inégalités d'apprentissages ?
- Existe-t-il des alternatives et, en supposant une réponse positive, quelles sont les conditions de leur mise en œuvre ?

Quelques études expérimentales

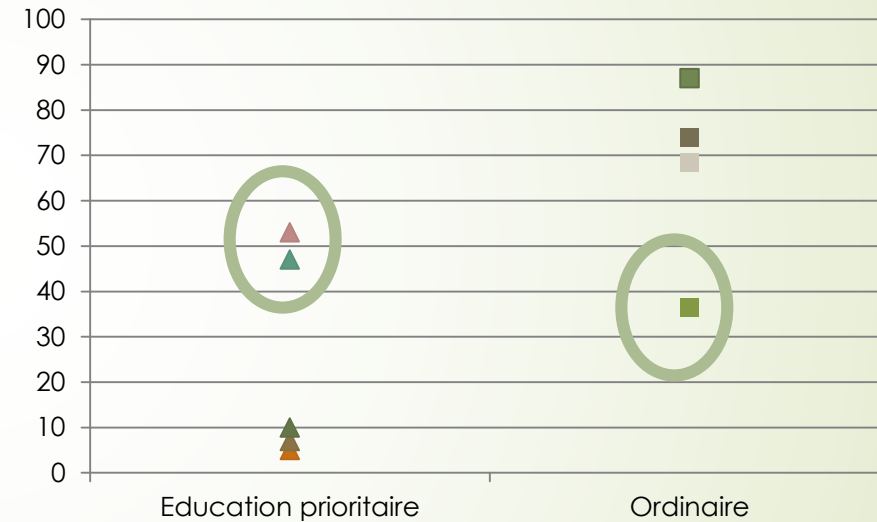
- ▶ Plusieurs études comparant des classes en éducation prioritaire et en milieu ordinaire
 - ▶ Essentiellement en CM2 et sixième, sur la géométrie et les grandeurs et mesures
 - ▶ Evaluation des effets des enseignements sur les apprentissages
- ▶ Résultats des analyses des pratiques enseignantes
 - ▶ Des caractéristiques des enseignements largement partagées
 - dont on peut supposer que certaines sont potentiellement différenciatrices (passivement)
 - ▶ Des variations ...
 - ▶ ... mais pas si systématiquement différenciées en fonction du contexte
 - ▶ Quelques tendances, mais des « exceptions »

Etude des effets en termes d'apprentissages

Construction du symétrique d'un point



Définition du symétrique d'un point



Taux de réussite à deux tâches dans des classes de l'EP ou milieu Ordinaire

- Hiérarchie des résultats en moyenne entre EP et Ordinaire ...
- ... mais avec des exceptions
- Qui correspondent aux exceptions identifiées dans l'analyse des pratiques



Des éléments différenciés dans les pratiques enseignantes

- Choix de scénarios plus ou moins ambitieux, consistants et cohérents en termes de savoirs
- Des savoirs plus ou moins problématisés
- Part et nature du travail dévolu aux élèves
- Une expertise dans l'étayage de l'activité des élèves
 - Individuelle et collective
 - Écrit et oral
 - Gestion du tableau
 - Etc.
- L'identification des objets de savoir en jeu
 - des savoirs plus ou moins « transparents »
- La prise en charge des enjeux langagiers dans le scénario et la mise en œuvre

Un projet en géométrie en 6ème

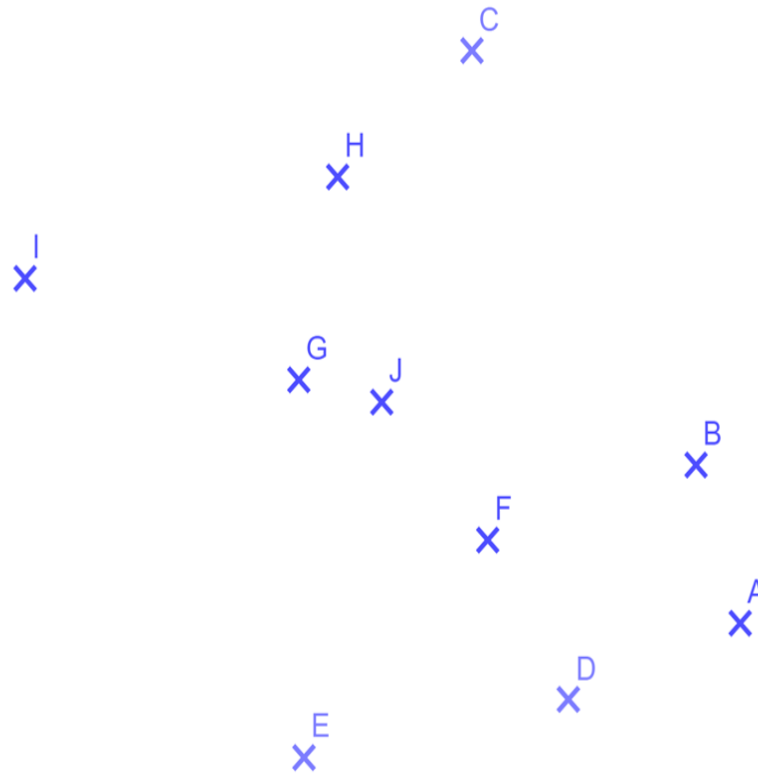
- La notion de cercle en sixième

Définition : Le cercle de centre O et de rayon r est l'ensemble des points situés à la distance r du point O

- Quels enjeux d'apprentissages et quelles difficultés cette définition représente-t-elle pour les élèves en 6ème ?
- Des enjeux conceptuels...
- ... et langagiers !
- En lien les uns avec les autres

Une tâche emblématique

Exercice 3 :



Dans le nuage de points ci-dessus, les points B, C, D et E sont situés sur un même cercle.

Le centre de ce cercle est l'un des points de la figure.

En utilisant ta **règle graduée**, trouve le centre de ce cercle puis réponds aux questions.

1. Explique pourquoi tu penses que le point que tu as trouvé est bien le centre du cercle.

Environ 1/3 des élèves réussissent, alors même que la définition fait partie des attendus de fin de CM1



Le cercle chez Euclide

Définition 15

Un cercle est une figure plane comprise par une seule ligne qu'on nomme circonférence, toutes les droites menées à la circonférence d'un des points placé dans cette figure étant égales entre elles.

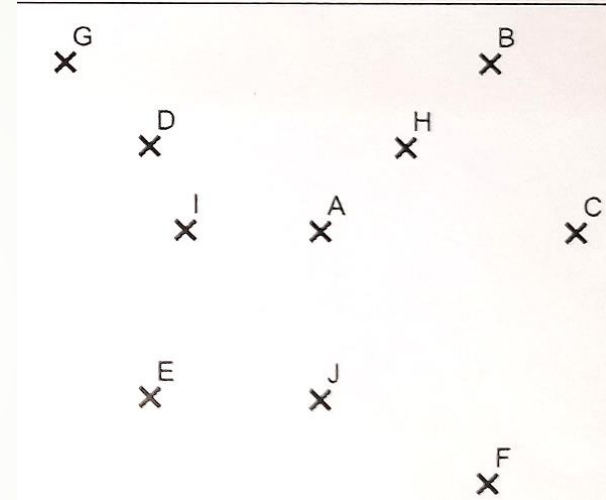
- Ne parle pas de distances et encore moins de points mais de lignes égales entre elles
- Géométrie « à la Euclide » à laquelle on rajoute les mesures (Robert, 1994) et presque le « plan comme ensemble de points » (les maths modernes et la contre-réforme sont passées par là)

Extraits des programmes et manuels

- **Repères de progressivité** « Les longueurs : En 6e, le travail sur les longueurs permet en particulier de consolider la notion de périmètre, et **d'établir la notion de distance entre deux points**, entre un point et une droite. »
- Mais une étude de manuels de 6^{ème} rapide montre que la distance entre deux points est traitée comme un objet supposé être déjà maîtrisé par les élèves
 - 1 seul manuel sur 6 consultés donne une définition
- La notion de distance n'est pas non plus questionnée en général dans le travail sur la droite graduée (Chesnais et Destribats, 2018)
 - Notamment lien entre abscisse et distance à l'origine
 - Distance entre points / distance entre nombres

Un exercice sur la notion de distance entre deux points

d) Trouve un point à la distance AC du point E.



- Écrire une phrase pour rendre compte du fait que D convient, sans utiliser d'autre notation que celle d'une lettre pour nommer un point.
- La réponse attendue suppose-t-elle un raisonnement ?
- Quels types d'objets mathématiques met-elle en jeu ?
- Quels sont les enjeux et difficultés potentiels sur le plan langagier ?

Un exercice sur la notion de distance

d) Trouve un point à la distance AC du point E.

Un raisonnement : un pas déductif

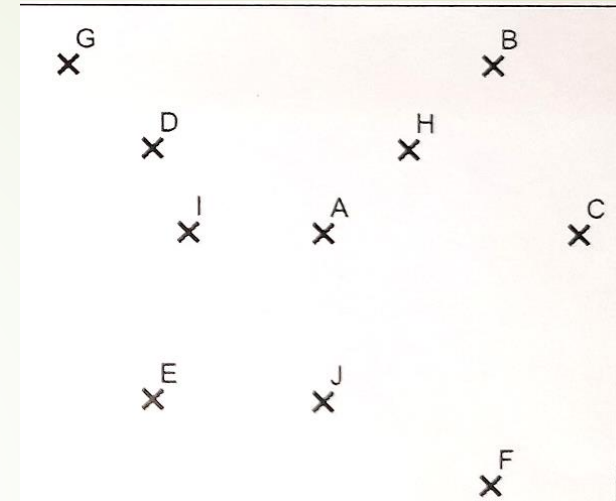
Le point D est à la distance AC du point E

⇔ Le segment [DE] a la même longueur que le segment [AC]

Énoncé-tiers : la distance entre deux points est la longueur du segment qui joint ces deux points

Plusieurs formulations « équivalentes »

- $DE=AC$
- La distance de D à E est égale à la distance de A à C
- Le point D est à la même distance du point E que A de C



Enjeux

- Segments-longueurs / points-distances
- Complexité sur le plan logique et langagier, notamment de la prise en charge de la relation entre 4 objets
- La question de la notation AC (Chevallard et Joshua, 1982)

Les seuls qui produisent un énoncé correct...

- Parlent de longueurs de segments égales

Le segment $[AC]$ a la même longueur que le segment $[ED]$.

Les segments $[ED]$ et $[AC]$ ont la même longueur.

~~La~~ La longueur du segment $[ED]$ est égale à la longueur du segment $[AC]$.

- 1 Les points qui font la même distance que les points A et C sont les points E et D .
- 2 Les points E et D font la même distance que A et C .
- 3 Les segments $[ED]$ font la même longueur que $[AC]$.

Les autres...

Le point D et la même distance ^A que ~~le point~~

le point a la longueur de AC c'est ED.

on a mesuré $[AC]$ et on a ~~trouvé~~ trouve que $[D]$ que égale a $[AC]$

Le segment $[ED]$ est à la même distance de $[AD]$.

la distance AC du point E est D

la distance du segment $[AC]$ fait la même la même distance du segment $[ED]$

La réponse est le point D parce que ~~le point~~ le point $[ED]$ a la même longueur de $[AC]$.

Le segment ED à la même distance que le segment AC

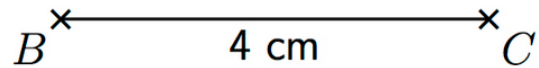
Le point D est à la distance du point E car quand on mesure au compas on voit que le point D est pas la même longueur du point A mes la même longueur du point E



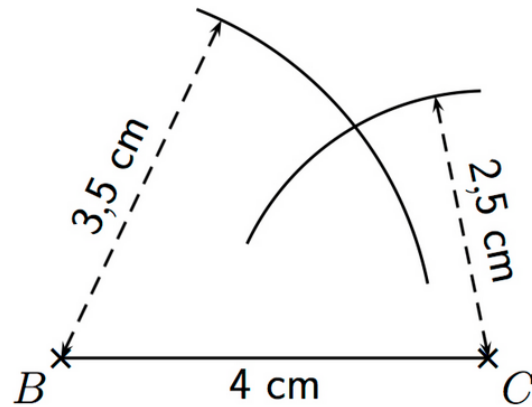
La construction d'un triangle à partir de la définition du cercle

- ▶ « **Le raisonnement** : À partir du CM2, on amène les élèves à dépasser la dimension perceptive et instrumentée pour raisonner uniquement sur les propriétés et les relations. Par exemple, l'usage de la règle et du compas pour tracer un triangle, connaissant la longueur de ses côtés, mobilise la connaissance des propriétés du triangle et de la définition du cercle. [...] »
(programmes du cycle 3, 2015)
- ▶ Quel est le raisonnement attendu ? Quelles sont les propriétés du triangle en jeu ?
- ▶ Qu'est-ce qui peut faire obstacle pour certains élèves qui ne pensent pas à mobiliser le compas / la définition du cercle ?

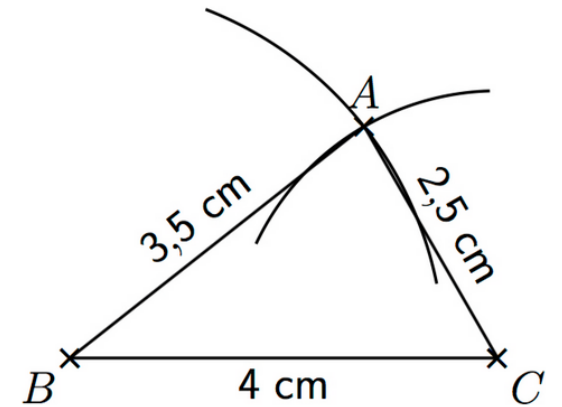
On trace le triangle ABC tel que $AB = 3,5$ cm, $BC = 4$ cm et $AC = 2,5$ cm.



1/ Tracer le côté le plus long ; ici, il s'agit de $[BC]$ qui a pour longueur 4 cm.



2/ Tracer deux arcs de cercle : l'un de centre B et de rayon 3,5 cm, l'autre de centre C de rayon 2,5 cm.



3/ Le point A est à l'intersection des deux arcs de cercle ; terminer en traçant le triangle ABC .

➤ <https://www.desmaths.fr/cours/index.php?n=5e&c=04>

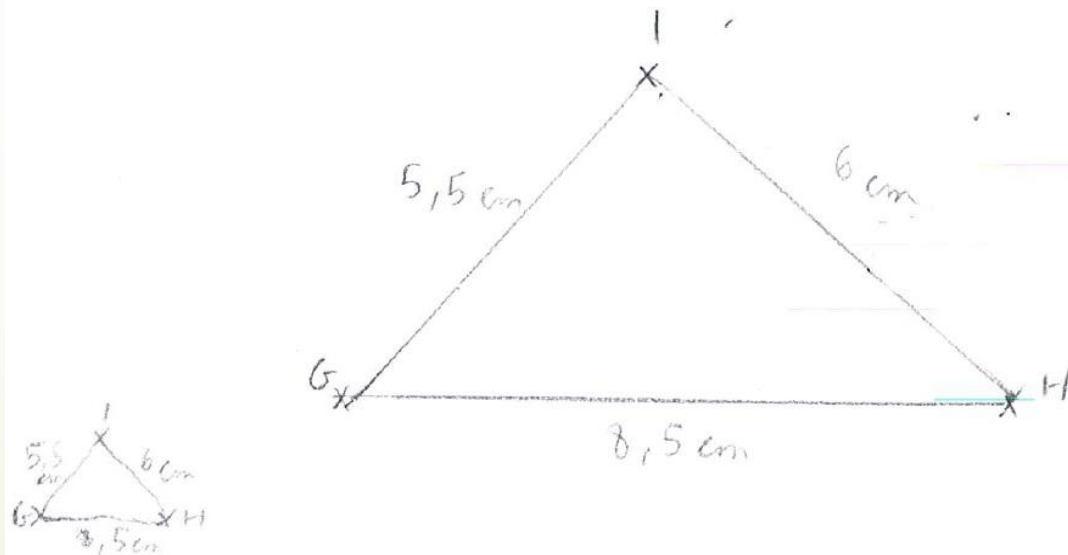
Niveau Entraînement
DM L'arcure et compas

- 1) Trace le segment $[AB]$ de 4 cm
- 2) Trace le segment $[BC]$ de 6 cm
- 3) Trace le segment $[AC]$ de 5 cm

exercice 3 :
Tracer horizontalement $[BC] = 6$ cm
A l'aide d'un compas tracer vers le haut $[AB] = 4$ cm et
 $[AC] = 5$ cm


Exercice 4 :

Construis ci-dessous un triangle GHI dont le côté $[GH]$ mesure 8,5 cm, le côté $[HI]$ mesure 6 cm, et le côté $[GI]$ mesure 5,5 cm.





Des difficultés liées aux formes linguistiques



La prise en charge langagière des relations : quand le diable se cache dans les « petits mots »

Définition : Le cercle de centre O et de rayon r est l'ensemble des points situés à la distance r du point O

- La préposition « de » (et ses dérivés, « d' » ou « du » ou « des ») est le mot le plus fréquent dans les énoncés mathématiques, alors qu'il arrive en 3^{ème} position dans les énoncés de français quotidien (Laborde, 1982)
- Avec des usages qui viennent de la langue française, mais qui sont plus ou moins usités et qui sont très complexes

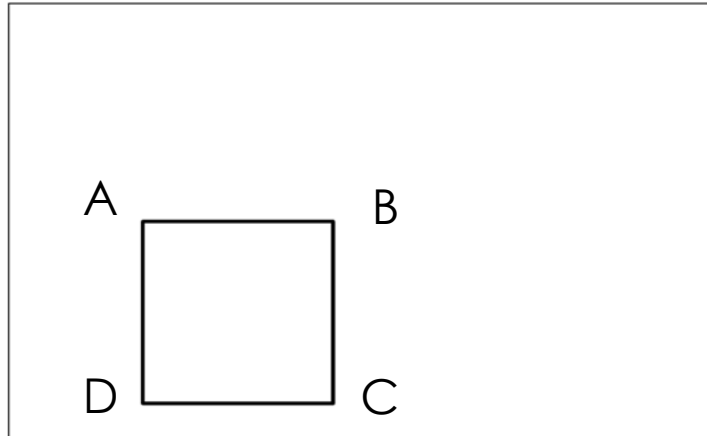
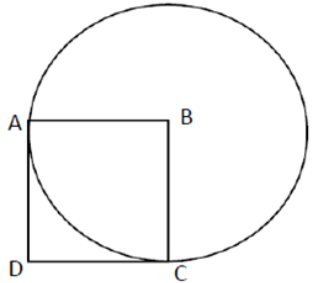


Des difficultés liées aux formes linguistiques : les usages de la préposition « de » en mathématiques

- ▶ Usage 1 : “distance de... à ...” : l'idée de point de départ
 - ▶ est utilisé aussi fréquemment dans le langage courant.
- ▶ Usage 2 : “le centre de ce (du) cercle”
 - ▶ idée d'appartenance comme dans “le chapeau de Pierre”, très usité dans le langage courant.
- ▶ Usage 3 : “le cercle de centre O” permet d'exprimer de façon concise une propriété de l'objet ; pourrait être remplacé par une proposition relative introduite par le pronom relatif “dont” : “dont le centre est O” ;
 - ▶ s'emploie également dans le langage courant “le chapeau de couleur rouge”, mais est peu usité.
 - ▶ On retrouve dans cette catégorie la locution “domaine de définition” (domaine dans lequel la fonction est définie).
- ▶ Usage 4 : “équation de droite” : il s'agit d'un usage 2, comme par exemple si l'on parle de l'équation d'une droite précise, mais avec ici une dimension générique quand on parle de la notion d'équation de droite.
 - ▶ En français courant, on pourrait de la même façon distinguer le pied d'une table du ‘concept’ “pied de table”.
- ▶ Ces différents usages peuvent correspondre à des mots différents dans d'autres langues.

Un diagnostic

Exercice 1 : On a commencé à reproduire la figure ci-dessous dans le cadre, en l'agrandissant. Termine la reproduction.



Une camarade est absente, elle n'a pas vu pas la figure de départ mais elle a le cadre avec le quadrilatère dessiné. Quelle consigne peux-tu lui donner, par téléphone, pour construire correctement le cercle ? Trouve deux formulations possibles.

Première formulation possible :

.....

Autre formulation possible :

.....

➡ Auger et Chesnais (2021)

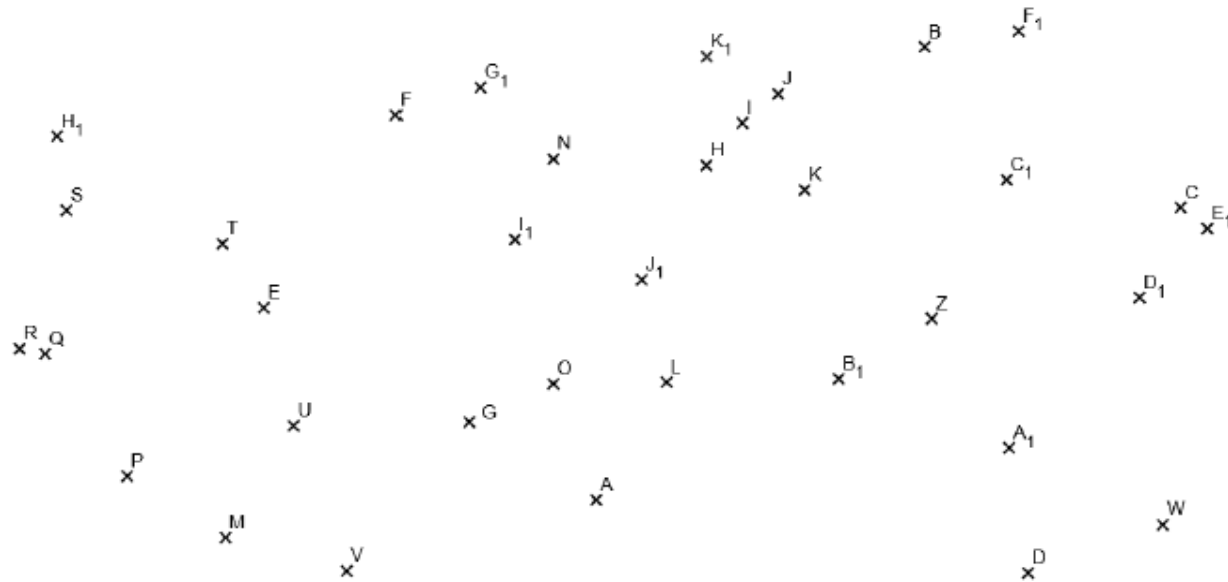
%	EF	EP
Non traité	37	26
mentionnent deux informations (centre et rayon OU centre et point)	59	30
désignation du centre : « centre » / « mil(l)ieu »	30/11	9/4
Pointe du compas	19	22

Effectifs ¹²	EF	EP
de centre B	2	1
dont le centre/ <u>milieu</u> est (et) (le point) B	3	1
cercle qui a pour centre (<u>/milieu</u>) le point B	1	
B sera/est le centre du cercle	3	
prend B pour centre / prend pour centre B	1	1
pose la pointe/mine/pique du compas sur (le point) B	5	5
au centre du cercle place le point B	1	

Expérimentations dans des classes de 6^{ème} en REP+ et ailleurs

- ▶ Un travail collaboratif entre enseignants et chercheuse didacticienne au sein d'un groupe IREM qui travaille depuis plusieurs années sur l'enseignement de la géométrie et les questions de langage
- ▶ Élaboration de tâches, incluant une part importante de productions langagières (orales et écrites) et prenant en charge les enjeux conceptuels (notamment distance) et langagiers
- ▶ Mises en œuvre incluant une part d'activité des élèves importante (notamment langagière et en collectif) en appui sur les tâches et en articulant avec la dimension matérielle
- ▶ Avec une introduction progressive des formes linguistiques expertes
 - ▶ Cercle de centre ... et de rayon...
 - ▶ Distance de... à ...
 - ▶ Être à égale distance de
 - ▶ ...
- ▶ Analyses collectives ; pré et post tets
- ▶ Retravail l'année suivante et remise en œuvre

Une tâche d'introduction à la définition du cercle



Partie n°1

Sur le nuage de points ci-dessus,
Trouver tous les points qui sont à 4 cm du point Z.

Partie n°2

Sans mesurer, trouver tous les points situés à la distance EM du point E. Expliquer votre démarche.

.....

➤ Procédures

- Règle graduée; règle informable
- Compas à partir de la règle et on reporte
- Compas à partir de la règle et tracé
- Règle puis compas (éventuellement cercle)

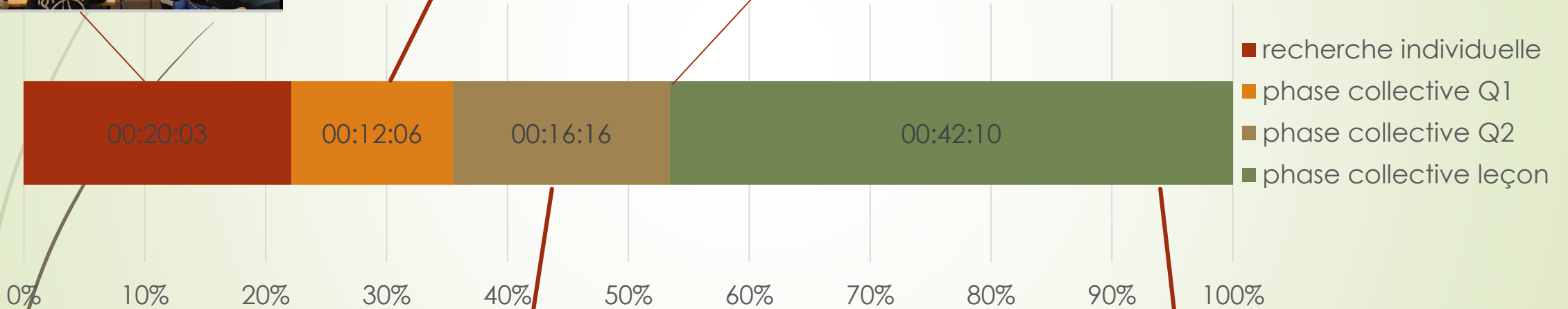
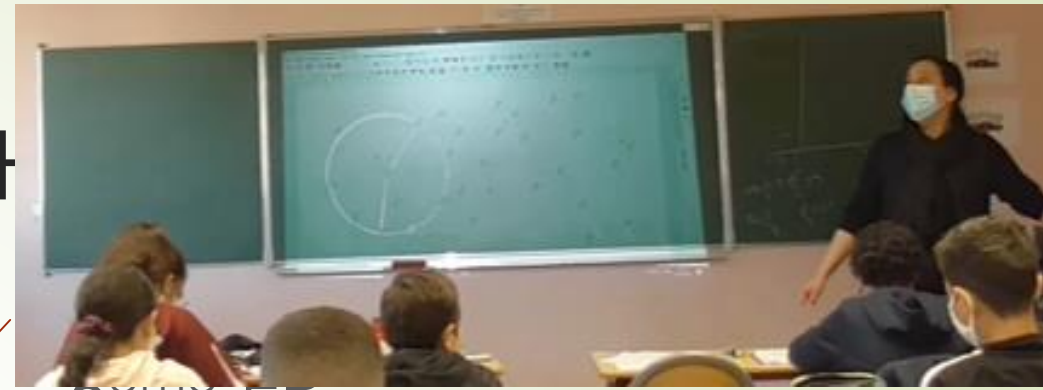
➤ Raisonnement qui repose sur la définition de la distance entre deux points comme longueur du segment qui joint ces deux points (Cerclé et al., 2022)

➤ Langagièrement :

- point situé à une distance de 4 cm du point Z
- Plusieurs formulations équivalentes de l'égalité des distances mais difficiles

La séance – durée 1h

le cercle 2021 – 6^{ème} LI



Mise en commun des procédures : un extrait





Mise en commun des procédures : un extrait

Anouar On utilise euh le compas

T Le compas oui

Anouar on met sur le point E, après on met l'autre bout sur le M et après on va tracer.

T pourquoi? parce que ? S1 dit qu'on prend l'écartement EM et ça me permet d'avoir quoi ? [...] oui S2 ?

Yasmine là en fait c'est la distance EM donc en fait quand on va tourner, et bé tous les points qui vont avoir cette distance, et bé ils vont être sur le cercle. [...]

T Tu peux répéter ?

Yasmine quand, quand, là c'est la distance EM, donc, après, quand on va tourner, tous les points qui z'auront la même distance que EM, et be ils vont être sur le cercle.

T elle vient de dire que cet écartement là me permet, autrement dit, de reporter la distance EM et quand on trace le cercle, tous les points qui sont sur le cercle, ils sont à- ?

[...]

Samuel en gros tous les points qui sont sur le cercle, sont des points qui sont à ég-, qui sont égale distance, enfin si on trace les segments, ils sont égal, c'est égal à EM.

Les étapes d'évolution des discours dans la formulation des procédures

Considérations matérielles

« écartement entre les branches du compas » la distance peut être « prise » et « transportée »

Matériel à mathématique / longueur à distance

Gestes



Objets mathématiques : points, distances

Distance comme relation

Avec des points
Entre des points de ... jusqu'à...
de ... à...

Distance **de** (un point/une ligne) à un point

Relations entre distances

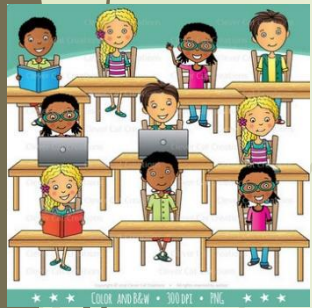
Processus de conceptualisation

Accompagné d'un processus de développement des discours

Ils ont tous la même distance
De E
Ils sont tous de la même distance
Ils sont tous à la même distance
Ils sont tous à une distance égale de E
Ils sont tous à une distance égale du centre

Comment vous définiriez un cercle?

50 tours de parole



Une ligne qu'on a tournée

Une ligne ronde

Tous les points au bord de la même distance

La même distance de la ligne arrondie au centre

Un ensemble de points

Une infinité de points

À la même distance

la même longueur entre le centre et les points

La même distance du centre

Qui ont la même distance du centre

Qui sont situés à la même ou à égale distance

du centre
Du cercle



En utilisant le mot 'distance'

Une ligne faite de quoi ?

Comment sont les points?

Qui ont ou qui sont?

À la même distance de quoi ?

Une ligne faite d'une infinité de points qui sont tous situés à la même distance du centre du cercle



La naturalisation des pratiques langagières mathématiques chez les experts

- « la communauté des mathématicien-ne-s a développé des pratiques discursives qui lui sont propres et qui s'écartent parfois des pratiques langagières non mathématiques. Ces pratiques reposent sur de nombreux implicites qui sont parfois naturalisés au point d'être difficilement identifiables par les locuteurs/trices, y compris (ou en particulier) par les «locuteurs/trices compétent-e-s ». (Barrier et Durand-Guerrier, actes CORFEM 2015)



Pour conclure

- ▶ Globalement, l'enseignement des mathématiques en France est générateur d'inégalités d'apprentissages en fonction de l'origine socio-économique
- ▶ Certains facteurs ne relèvent pas de l'enseignant (politiques éducatives), mais toutes les pratiques enseignantes ne se valent pas
- ▶ Certaines caractéristiques des pratiques enseignantes permettent de meilleurs apprentissages pour tous les élèves.
- ▶ Les caractéristiques principales
 - ▶ Des scénarios ambitieux mathématiquement
 - ▶ Des mises en œuvre qui favorisent l'activité des élèves sur des tâches mathématiques riches
 - ▶ Une prise en charge du langage comme objet et moyen d'apprentissage
 - ▶ L'identification des objets de savoirs en jeu
- ▶ Mettre en œuvre de telles pratiques nécessite de s'interroger sur les contenus mathématiques (dénaturaliser) et leurs enjeux didactiques, être à l'écoute des élèves
 - ▶ Nécessite une bonne formation !

Bibliographie

Articles et ouvrages de recherche

- Auger, N. & Chesnais, A. (2022). Enjeux syntaxiques dans les apprentissages mathématiques et plurilinguisme. In P. Escudé, C. Hache et C. Mendonça Dias (dir.). *Plurilinguisme et mathématiques*. Editions Lambert Lucas.
- Chesnais, A. (2020). L'apport d'un point de vue de didactique des mathématiques sur la question des inégalités scolaires. *Éducation & Didactique*, Presses Universitaires de Rennes, 14-1, pp.49-79. <10.4000/educationdidactique.5378>. <halshs-03441766>
- Chesnais A. (2014b). Différenciation dans le processus d'enseignement-apprentissage en mathématiques en éducation prioritaire et ailleurs. *Revue Française de Pédagogie*, 188, 63-73.
- Chesnais A. (2014a). *Enseigner les mathématiques en ZEP. Recherche sur la géométrie en sixième*. 214 p. PUR : Rennes.

Articles d'interface

- Chesnais, A., Destribats, A., Delamarre, A., Lahmouche, N., Lefort, J. et Bejaud, M. mieux faire apprendre tous les élèves en prenant en charge des objets transparents et des enjeux langagiers : un exemple avec la notion de distance, en lien avec le concept de cercle, *Revue Mathématiques Ecoles*, 240, 55-68.
- Cerclé, V. Chesnais, A., Daval, N., Destribats, A., Lahmouche, N., Lefaucheu, J. et Lefort, J. (2022). Le rapport entre distance et longueur : enjeu de vocabulaire ou enjeu de raisonnement ? p. 41-58. In *Actes de la CORFEM 2022* (Nantes, 9 et 10 juin 2022).