Statistique
Compétence 2
Ressource R4.04
Outils numériques pour la gestion

Jérôme Casse

IUT de Sceaux GEA 2

09 janvier 2023

Dans l'épisode précédent

À quoi sert la statistique ?

- Analyse précise des données (intervalle de confiance).
- Comparaison de données (tests statistiques).

Faire un intervalle de confiance

- Calculer une moyenne estimée $\hat{m}$.
- Calculer un écart-type estimé $\hat{\sigma}$.
- Lire dans les tables de la loi gaussiennes et de la student.
- Construire un intervalle de confiance dans 3 cas :
  - Loi inconnue et $n \geq 30$.
  - Pourcentage et $n \geq 30$.
  - Loi normale et $n \leq 30$.

Tests statistiques

- Test de la moyenne.
- Test du χ^2

Un exemple

Une usine produit des tablettes de chocolats qui doivent être de 100g en moyenne.
Les 100 dernières tablettes produites pèsent :

105	102	96	103	101
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
101	98	100	98	104

- Question : la machine est-elle déréglée ?

Test de la moyenne

Pour répondre scientifiquement, on fait un test de la moyenne.

- La valeur de référence : $m_0 = 100$ (on veut des tablettes de 100g).
- Le poids des tablettes est indépendants et de même loi.
- Le poids des tablettes suit une loi (inconnue) de moyenne m (inconnue) et d'écart-type σ (inconnue).
- La question que l'on se pose c'est : $m = m_0$ ou $m \neq m_0$?

On peut calculer $\hat{m}$ et $\hat{\sigma}$ comme dans l'épisode précédent.

Flashback

- Moyenne estimée :

$$\hat{m} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

- Écart-type estimé :

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{(X_1 - \hat{m})^2 + \cdots + (X_n - \hat{m})^2}{n-1}}$$

Idées ?

Idée d'une méthode pour décider si la machine est déréglé ?

Exemple : $\hat{m} = 100.8$, $\hat{\sigma} = 2.3$ et $n = 100$. Au risque 5%, comment décider si la machine est déréglée ?

WOOCLAP

Idées

1. Idée 1 : si $\hat{m} = m_0$ la machine est bien réglée ; si $\hat{m} \neq m_0$ la machine est déréglée. Trop restrictif.
2. Idée 2 : on se donne un intervalle $\hat{m} = [95; 105]$, la machine est bien réglée ; sinon non. Comment choisir cet intervalle ?
3. Idée 3 : on construit l'intervalle de confiance de m (inconnue) et si m_0 est dedans, la machine est bien réglée. Ça marche ! Mais ce ne sera pas généralisable à tous les types de tests.
4. Idée 4 : le calcul d'une statistique et d'une zone de rejet.

Vocabulaire

Lors d'un test statistique, on test une hypothèse H_0 contre une autre hypothèse H_1.

Hypothèse H_0	Hypothèse H_1
Hypothèse nulle	Hypothèse alternative
Hypothèse non coûteuse	Hypothèse coûteuse
Si H_0 est "vraie", on ne fait rien	Si H_1 est vraie, il faut agir
Fonctionnement normal	Changement de situation
$H_0 : m = m_0$	$H_1 : m \neq m_0$ (ou $H_1 : m < m_0$ ou $H_1 : m > m_0$)

Dérouler d'un test statistique

On souhaite tester l'hypothèse H_0 contre l'hypothèse H_1.

1. On se donne un risque d'erreur α petit (10%, 5%, 1%, 0.01%).
2. On suppose que H_0 est vraie.
3. À partir de nos observations $X_1, \ldots, X_n$, on calcule une statistique $\hat{z}$ dont la loi est connue sous l'hypothèse H_0.
4. Déterminer une zone de rejet Z_r à partir de
   - la loi de la statistique,
   - de H_1 et
   - de α.
5. On compare la valeur $\hat{z}$ à Z_r :
   - Si $\hat{z} \notin Z_r$, alors on ne rejette pas H_0.
   - Sinon, on accepte H_1.

Les erreurs

Lors d'un test, il peut y avoir 2 types d'erreurs :

On accepte H_1, mais H_0 est vrai	On ne rejette pas H_0, mais H_0 est fausse
Chiant à court terme, pas chiant à long terme	Invisible à court terme, dramatique à long terme
Erreur de 1ère espèce	Erreur de 2nde espèce
Probabilité α d'arriver	Probabilité β d'arriver
Risque du test	Puissance du test
α contrôle (donné par l'énoncé)	β non calculable de manière générique

Questions sur les tests statistiques ?

Test de la moyenne

Un exemple

Une usine produit des tablettes de chocolats de 100g en moyenne. Les 100 dernières tablettes produites pèsent :

$$\begin{array}{ccccc} 105 & 102 & 96 & 103 & 101 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 101 & 98 & 100 & 98 & 104 \end{array}$$

- Question : la machine est-elle déréglée ? On prend $\alpha = 5\%$.

Formalisation des hypothèses

On a une valeur de référence $m_0 = 100$g.

On produit des plaquettes de chocolats de loi inconnue.

On va tester l'hypothèse nulle

- $H_0 : m = m_0$, c'est-à-dire que la moyenne des plaques de chocolats est de 100g (on continue la production)
  versus
- $H_1 : m \neq m_0$, c'est-à-dire que la machine est défectueuse (on arrête la production, on recalibre la machine et on fait repartir la production)

Calcul de $\hat{m}$ et $\hat{\sigma}$

- Moyenne estimée :

$$\hat{m} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} = 100.8.$$

- Écart-type estimé :

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{(X_1 - \hat{m})^2 + \cdots + (X_n - \hat{m})^2}{n-1}} = 2.3.$$

Flashback : TCL

Théorème

Soit $X_1, \dots, X_n$ n variables aléatoires indépendantes de même loi inconnue de moyenne m_0 et d'écart-type σ.
Alors, quand n est grand (ici $n \geq 30$), pour tous a, b,

$$P\left(a \leq \frac{\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - m_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \leq b\right) \simeq P\left(a \leq \mathcal{N}(0,1) \leq b\right).$$

Chez nous, cela va donner :

$$P\left(a \leq \frac{\hat{m} - m_0}{\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}} \leq b\right) \simeq P\left(a \leq \mathcal{N}(0,1) \leq b\right).$$

Ainsi, sous l'hypothèse H_0, par le TCL,

$$\hat{z} = \frac{\hat{m} - m_0}{\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}} = \frac{100.8 - 100}{2.3/\sqrt{100}} = \frac{0.8}{0.23} \simeq 3.48$$

est sensé suivre une loi gaussienne centrée réduite. En particulier, si H_0 est vrai, 95% du temps, $\hat{z}$ est compris entre -1.96 et 1.96 (voir table).

Comme ce n'est pas le cas ici, H_1 est accepté. La machine est déréglée.

Flashback : lecture table gaussienne

AFFICHAGE DE LA TABLE

Les variantes

- Différents types d'hypothèses alternatives :
  - $H_1 : m \neq m_0$ ou
  - $H_1 : m < m_0$ ou
  - $H_1 : m > m_0$.
- Différents types de données possibles :
  - Loi inconnue et $n \geq 30$.
  - Loi bernouilli (pourcentage) et $n \geq 30$.
  - Loi normale et $n \leq 30$.

9 exercices possibles.

Exemple : pourcentage avec $H_1 : p > p_0$

Un fournisseur vous fournit des boulons dont la probabilité d'être défectueux est de 5%.
Vous avez reçu un lot de 10000 boulons et vous souhaitez savoir si vous l'acceptez ou le refusez.
Pour cela, vous prenez 200 boulons et constater que 11 d'entre eux sont défectueux.

- Au risque 5%, que faire ?
- Au risque 5%, à partir de combien de boulons défectueux, refusez-vous le lot ?

WOOCLAP

Formalisation des hypothèses

On a la valeur de référence $p_0 = 0.05$.
On a un pourcentage/loi de Bernoulli.
On va tester l'hypothèse

- $H_0 : p = p_0$, on accepte le lot
  versus
- $H_1 : p > p_0$, on refuse le lot (en effet, si H_1 est vrai alors on a plus de boulons défectueux que attendus). En revanche, si $p < p_0$, c'est pas grave, on a moins de boulons défectueux qu'attendus.

Flashback du S3 : loi de Bernoulli

- $\Omega(X) = \{0; 1\}$, deux alternatives seulement.
- $P(X = 1) = p$ et $P(X = 0) = 1 - p$.
- $E[X] = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$.
- $\text{Var}(X) = E[X^2] - E[X]^2 = (0^2 \times (1 - p) + 1^2 \times p) - p^2 = p - p^2 = p(1 - p)$.
- $\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{p(1 - p)}$.

Calcul de $\hat{p}$ et de σ_0.

- Moyenne estimée : $\hat{p} = 11/200 = 0.055$.
- Écart-type sous H_0, on va prendre

$$\sigma_0 = \sqrt{p_0(1-p_0)} = \sqrt{0.05 \times 0.95} = 0.22.$$

- Par le TCL sous H_0,

$$\hat{z} = \frac{0.055 - 0.05}{0.22/\sqrt{200}} = \frac{0.005}{0.0155} \simeq 0.322.$$

suit une loi normale centrée réduite.

Comparaison gaussienne : la table

- $H_0 : p = p_0 = 0.05$ versus $H_1 : p > p_0 = 0.05$ au risque 5%.
- On détermine la zone de rejet.

PRENEZ DES NOTES

- Comme $\hat{z} < 1.645$, on accepte le lot.
- On refuse le lot si $\hat{z} = \frac{\hat{p}-0.05}{0.0155} > 1.645$.
  Donc en résolvant l'inéquation, on trouve
  $\hat{p} > 0.05 + 1.645 \times 0.0155 = 0.0755$.
  Ainsi, à partir de $200 \times 0.0755 = 15.1$, soit 16 boulons défectueux, on refuse le lot au risque 5%.

PAUSE

Test du χ^2

Prononciation de χ

- χ est une lettre grecque.
- Cela se prononce Khi.
- On la trouve dans le mot “chiromancie” en français et aussi dans “chirurgie”.

Utilité d'un test du χ^2

- Adéquation en loi.
  Le marché automobile de 2000 ressemblait à

Essence	Diesel	Électrique/Hybride
60%	30%	10%

  Est-ce toujours le cas en 2020 ?
  On se donne un risque de 10%, et on a les données suivantes, sur 150 véhicules vendus, on a observé

Essence	Diesel	Électrique/Hybride
72	37	41

- Test d'indépendance.
  On fait une campagne de publicité, a-t-elle fonctionné ?

Test d'adéquation en loi

Test d'adéquation en loi

- Une loi de probabilité qui est donnée (vente de véhicules en 2000) :

Essence	Diesel	Électrique/Hybride
60%	30%	10%

- Données : vente de 150 véhicules en 2020, on a

Essence	Diesel	Électrique/Hybride
72	37	41

- Question : est-ce que la répartition de ventes des véhicules entre 2000 et 2020 a significativement changé ?

WOOCLAP

Formalisation des hypothèses

On va tester l'hypothèse

- H_0 : la vente des véhicules en 2020 ressemble à celle des années 2000 versus
- H_1 : ce n'est pas le cas.

Test d'adéquation en loi

- Une loi de probabilité qui est donnée (vente de véhicules en 2000) :

Essence	Diesel	Électrique/Hybride
60%	30%	10%

- 1ère étape : calcul des valeurs théoriques pour 150 véhicules :

Essence	Diesel	Électrique/Hybride
$150 \times 0.6 = 90$	$150 \times 0.3 = 45$	$150 \times 0.1 = 15$

- Vérification que tous les chiffres dans ce tableau sont ≥ 5 et que leur somme est ≥ 30.

Test d'adéquation en loi

- Valeurs théoriques et valeurs réelles :

	Essence	Diesel	Électrique/Hybride
Théorique	90	45	15
Observé	72	37	41

- Statistique que l'on regarde est

$$\hat{z} = \frac{(90-72)^2}{90} + \frac{(45-37)^2}{45} + \frac{(15-41)^2}{15} = 3.6 + 1.4 + 45.1 = 50.1.$$

De manière générique :

$$\hat{z} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(n_{\text{théorique,i}} - n_{\text{observé,i}})^2}{n_{\text{théorique,i}}}.$$

- Pourquoi cette statistique ?

Le théorème de probabilité

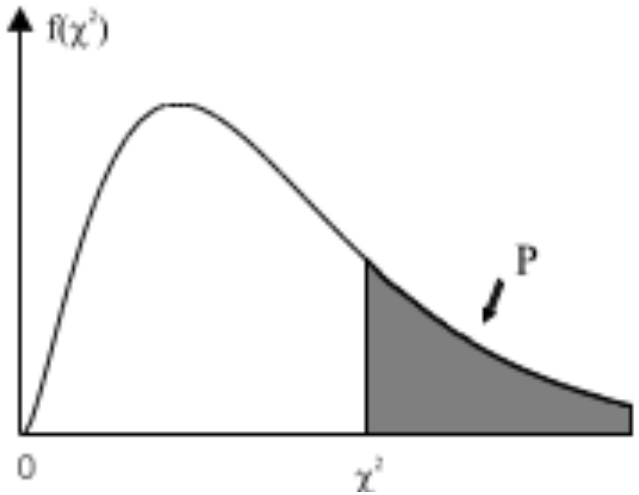
- Remarque : plus $\hat{z}$ est proche de 0, mieux cela doit être.

Un résultat en probabilité dit que,

- sous H_0, la statistique $\hat{z}$ suit une loi du χ^2 à $k-1$ degré de liberté.

Table de la loi du Khi-deux

Valeurs de χ^2 ayant la probabilité **P** d'être dépassées



Lecture dans la table de la χ^2

AFFICHAGE DE LA TABLE

Test d'adéquation en loi : conclusion

- Par la table de la χ^2, un risque de 5% à 2 degrés de liberté correspond à 5.991.
- Comme $50.1 > 5.991$, on accepte, au risque 5%, l'hypothèse H_1 qui est que le marché automobile a changé entre 2000 et 2020.

Test d'indépendance

Exo 6 du TD2 du S3

Le département GEA2 2A accueille 110 étudiants répartis comme dans le tableau ci-dessous :

filière \ langue	allemand	espagnol
CG2P	4	24
GEMA	10	72

- Le choix entre la filière et la langue est-il indépendant au risque 10% ?

Flashback : l'indépendance

- Deux événements A et B sont indépendants si

$$P(A \text{ et } B) = P(A) \times P(B).$$

- Filière et langue indépendantes, cela veut dire que les 4 choses suivantes sont vraies :
  - $P(\text{CG2P et allemand}) = P(\text{CG2P}) \times P(\text{allemand})$,
  - $P(\text{CG2P et espagnol}) = P(\text{CG2P}) \times P(\text{espagnol})$,
  - $P(\text{GEMA et allemand}) = P(\text{GEMA}) \times P(\text{allemand})$,
  - $P(\text{GEMA et espagnol}) = P(\text{GEMA}) \times P(\text{espagnol})$.

Formalisation du test

On va tester l'hypothèse

- H_0 : filière et langue sont indépendantes versus
- H_1 : ce n'est pas le cas.

Estimation de la loi CG2P/GEMA et de la loi espagnol/allemand

filière \ langue	allemand	espagnol	Total	Proportion
CG2P	4	24	28	$28/110 \simeq 0.254$
GEMA	10	72	82	$82/110 \simeq 0.746$
Total	14	96	110	100
Proportion	0.127	0.873	100	

Ainsi, les probabilités estimées de chacun est

- $P(\text{CG2P}) \simeq 0.254$ et $P(\text{GEMA}) \simeq 0.746$,
- $P(\text{allemand}) \simeq 0.127$ et $P(\text{espagnol}) \simeq 0.873$.

Effectif théorique si indépendant

Si c'était indépendant, on aurait

- $P(\text{CG2P et allemand}) = 0.254 \times 0.127 \simeq 0.0324$, et donc $110 \times 0.0324 = 3.5$ étudiants CG2P et allemand.
- ...

Ainsi calcul des effectifs théoriques :

F \ L	allemand	espagnol
CG2P	$0.254 \times 0.127 \times 110 \simeq 3.5$	$0.254 \times 0.873 \times 110 \simeq 24.4$
GEMA	$0.746 \times 0.127 \times 110 \simeq 10.5$	$0.746 \times 0.873 \times 110 \simeq 71.6$

Il faut vérifier que tous les effectifs théoriques soit ≥ 5.
Ici : on fera comme si,
mais, en vrai, un effectif est < 5, donc on ne peut pas faire.

Comparaisons entre les données et le théorique

F \ L	allemand	espagnol
CG2P	obs : 4	24
	théo : 3.5	24.4
	$\hat{z}_{c,a} = \frac{(4-3.5)^2}{3.5} 0.07$	0.007
GEMA	10	72
	10.5	71.6
	$\frac{(10-10.5)^2}{10.5} = 0.02$	0.002

- Calcul des $\hat{z}_{i,j}$: $\frac{\left(n_{\text{observé}} - n_{\text{théorique}}\right)^2}{n_{\text{théorique}}}$
- Puis $\hat{z}$ est la somme des $\hat{z}_{i,j}$:

$$\hat{z} = 0.07 + 0.007 + 0.02 + 0.002 = 0.099.$$

Probabilité

- $\hat{z}$ suit une loi du χ^2 à $(2-1)\times(2-1)=1$ degré de liberté.
- De manière générique : à $(k_1-1)(k_2-1)$ degré de liberté
  où k_1 c'est le nombre de lignes du tableau et
  k_2 le nombre de colonnes.

- Dans la table de la χ^2, on lit 2.706 pour 1 d.l. et $\alpha = 0.1$.
- Comme $\hat{z} = 0.099 \leq 2.706$, on ne rejette pas H_0.
- Conclusion : le choix de la langue et de la filière semble indépendant.

Résumé des méthodes vues

Intervalle de confiances

1. Identifier la taille n de l'échantillon ($n \leq 30$ ou $n \geq 30$).
2. Identifier la loi des données (gaussienne, pourcentage, inconnue).
3. Calculer la moyenne empirique $\hat{m}$ ou $\hat{p}$.
4. Calculer l'écart-type estimé $\hat{\sigma}$.
5. La loi de $\frac{m-\hat{m}}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}$?
   - $n \geq 30$: loi normale.
   - $n \leq 30$ et loi des données gaussienne : loi de Student.
6. Trouver z via la bonne table tel que

$$P\left(-z \leq \frac{m-\hat{m}}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}} \leq z\right) = \alpha.$$

7. En déduire que l'IC au niveau de confiance α est

$$\left[\hat{m} - z\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}; \hat{m} + z\frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{n}}\right].$$

Test de la moyenne ou pourcentage

1. Identifier la taille n de l'échantillon ($n \leq 30$ ou $n \geq 30$).
2. Identifier la loi des données (gaussienne, pourcentage, inconnue).
3. Identifier la valeur de référence m_0 ou p_0 et définir l'hypothèse nulle $H_0 : m = m_0$.
4. Réfléchir pour trouver quel H_1 est le mieux entre $\neq$, $<$ et $>$.
5. Calculer la moyenne empirique $\hat{m}$ ou $\hat{p}$.
6. Calculer l'écart-type estimé $\hat{\sigma}$ ou $\sigma_0 = \sqrt{p_0(1-p_0)}$.
7. La loi de $\hat{z} = \frac{m_0 - \hat{m}}{\hat{\sigma}/\sqrt{n}}$?
   - $n \geq 30$: loi normale.
   - $n \leq 30$ et loi des données gaussienne : loi de Student.
8. Zone de rejet Z_r à partir de α, H_1 et la loi de $\hat{z}$.
9. Conclure si $\hat{z} \in Z_r$ ou $\notin$?

Test du χ^2 : adéquation en loi

1. Identifier la taille n de l'échantillon et vérifier $n \geq 30$).
2. Identifier la loi de référence $\mathcal{L}_0$.
3. Déterminer k le nombre de classes de $\mathcal{L}_0$.
4. Poser $H_0 : \mathcal{L} = \mathcal{L}_0$ et $H_1 : \mathcal{L} \neq \mathcal{L}_0$.
5. Calculer les effectifs théoriques de chaque classe sous $\mathcal{L}_0$.
6. Vérifier qu'ils sont tous ≥ 5.
7. Pour chaque classe, calculer $\frac{(n_{\text{théo}} - n_{\text{obs}})^2}{n_{\text{théo}}}$.
8. Les sommer pour trouver $\hat{z}$.
9. Lecture table pour la zone de rejet Z_r :
   - colonne : α,
   - ligne : $k-1$, le degré de liberté de la χ^2.
10. Conclure si $\hat{z} \in Z_r$ ou $\notin$?

Test du χ^2 : test d'indépendance

1. Identifier la taille n de l'échantillon et vérifier $n \geq 30$.
2. Déterminer k_1 et k_2 les nombres de classes (lignes et colonnes du tableau).
3. Poser H_0 : indépendance et H_1 : non indépendance.
4. Estimer les probabilités de chaque classe :
   - probabilité d'une ligne et
   - probabilité d'une colonne.
5. Calculer les effectifs théoriques de chaque case en supposant l'indépendance :

   $n \times$ proba d'être dans la ligne $\times$ proba d'être dans la colonne.

6. Pour chaque case, calculer $\frac{(n_{\text{théo}} - n_{\text{obs}})^2}{n_{\text{théo}}}$.
7. Les sommer pour trouver $\hat{z}$.
8. Lecture table pour la zone de rejet Z_r :
   - colonne : α,
   - ligne : $(k_1 - 1)(k_2 - 1)$, le degré de liberté de la χ^2.
9. Conclure si $\hat{z} \in Z_r$ ou $\notin$?

Bonne semaine !

Et à vendredi pour les GEMA2 !