TD1 : Trouver le minimum d'une fonction

I. Révision : minimum d'une fonction à une variable

Remarque : on parlera uniquement de minimum, mais la recherche de maximum peut être effectuée avec les mêmes méthodes.

1. Par lecture graphique

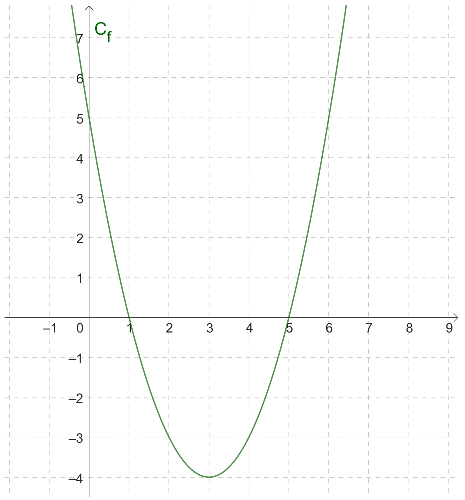
Pour représenter graphiquement une fonction à une variable, on a besoin de deux axes (Ox) et (Oy).

À partir du tracé de la courbe représentative d'une fonction, on peut obtenir par **lecture graphique** le minimum (quand il existe) d'une fonction.

Important : la valeur du minimum se lit sur l'axe (Oy).

Application 1

Donner par **lecture graphique** le minimum la fonction f dont on donne la représentation graphique sur l'intervalle $[-2; 9]$.



2. Par le calcul

Application 2 Pour $x \in [-5; 5]$, on étudie la fonction

$$g(x) = x^4$$

1. Déterminer la **fonction dérivée** g'.

   $g'(x) =$

2. Résoudre l'équation : $g'(x) = 0$.

3. Donner le **tableau de signe** de g' sur l'intervalle $[-5; 5]$.
   En déduire le **tableau de variations** de g sur l'intervalle $[-5; 5]$.

4. La fonction g admet-elle un minimum sur l'intervalle $[-5; 5]$?
   Si oui, donner sa valeur et en quelle valeur de x il est atteint.

5. **Résolution graphique**
   - Ouvrir `https://www.geogebra.org/classic?lang=fr`
   - Tracer la courbe représentative de la fonction g en tapant

     $g(x) = x\hat{}4$

     dans le champ de gauche de l'interface de GeoGebra.
   - Donner la valeur du minimum et en quelle valeur de x il est atteint.

II. Minimum d'une fonction à deux variables

1. Fonction à deux variables

Exemple de fonction à deux variables : $f(x, y) = 2x + y$
Calculer $f(0, 1)$ et $f(1, 0)$.

$f(0, 1) =$

$f(1, 0) =$

2. Par lecture graphique

Pour représenter graphiquement une fonction à deux variables, on a besoin trois axes (Ox) , (Oy) et (Oz).

À l'aide de la représentation graphique d'une fonction, on peut obtenir par **lecture graphique** le minimum (quand il existe) d'une fonction.

Important : la valeur du minimum se lit sur l'axe (Oz).

Application 3

On étudie les éventuels minima de la fonction g définie par :

$$g(x, y) = 2 + x^2 + y^4$$

pour $(x, y) \in [-6; 6] \times [-5; 5]$

1. Ouvrir `https://www.geogebra.org/3d?lang=fr`
2. Tracer la surface représentative de la fonction g en tapant

   $$g(x, y) = 2 + x\hat{\ }2 + y\hat{\ }4$$

   dans le champ de gauche de l'interface de GeoGebra3D.
3. Donner par lecture graphique le minimum de la fonction g et en quelles valeurs de (x, y) il est atteint.

3. Dérivée partielle

On considère une fonction f à deux variables .

On note $\frac{\partial f}{\partial x}$ la **dérivée partielle de f selon x**.

On note $\frac{\partial f}{\partial y}$ la **dérivée partielle de f selon y**.

Application 4

On considère la fonction f définie par : $f(x, y) = 2x + y + xy$

$\frac{\partial f}{\partial x} =$

$\frac{\partial f}{\partial y} =$

4. Par le calcul

On étudie la fonction à deux variables g définie pour x appartenant à $[-3; 4]$ et pour y appartenant à $[-6; 8]$ par :

$g(x, y) = x^2 + y^2 + xy$

Application 5

1. Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial g}{\partial y}$.

   $\frac{\partial g}{\partial x} =$

   $\frac{\partial g}{\partial y} =$

2. Résoudre le système d'équations

   $$\begin{cases} \frac{\partial g}{\partial x}(x_c, y_c) & = 0 \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x_c, y_c) & = 0 \end{cases}$$

   On dit que le point de coordonnées (x_c, y_c) est un **point critique** de f.
3. Calculer $g(x_c, y_c)$

   $g(x_c, y_c) =$
4. Développer l'expression littérale $(x + \frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{4}y^2$

   $(x + \frac{1}{2}y)^2 + \frac{3}{4}y^2 =$
5. Que peut-on en déduire au sujet de la fonction g ?
6. La fonction g admet-elle un minimum ?

III. Exercices

Dans les exercices suivants, n'hésitez pas à utiliser GeoGebra3D pour représenter graphiquement les fonctions à plusieurs variables.

Exercice 1

On considère la fonction suivante f définie sur $[-8;7]\times[-9;10]$ par :

$$f(x,y) = 2x + y + 4xy$$

1. Calculer les dérivées partielles de la fonction f.

   $\frac{\partial f}{\partial x} =$

   $\frac{\partial f}{\partial y} =$

2. Déterminer les points critiques de f.

3. La fonction admet-elle un minimum ?

Exercice 2

On considère la fonction suivante f définie sur $[-3;3]\times[-4;8]$ par :

$f(x,y) = e^{x^2+y^2}$

1. Calculer les dérivées partielles de la fonction f.

   $\frac{\partial f}{\partial x} =$

   $\frac{\partial f}{\partial y} =$

2. Déterminer les points critiques de f.

3. La fonction admet-elle un minimum ?

Exercice 3

On considère la fonction suivante sur $[-4;0[\cup]0;6]\times[-5;0[\cup]0;2]$:

$f(x,y) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y}$

1. Calculer les dérivées partielles de la fonction f.

   $\frac{\partial f}{\partial x} =$

   $\frac{\partial f}{\partial y} =$

2. Déterminer les points critiques de f.

3. La fonction admet-elle un minimum ?

Exercice 4 : Taux marginal de substitution

Dans cet exercice : $U(x,y) = xy + 3y$

- x est la quantité d'un bien X.
- y est la quantité d'un bien Y.
- Le tracé de y en fonction de x est appelé **courbe d'indifférence**.

- $U(x,y)$ est l'**utilité totale** correspondante.
- $\frac{\partial U}{\partial x}$ est l'**utilité marginale du bien X**.
- $\frac{\partial U}{\partial y}$ est l'**utilité marginale du bien Y**.
- Le **taux marginal de substitution (TMS)** est la quantité :

$$TMS = -\frac{\frac{\partial U}{\partial x}}{\frac{\partial U}{\partial y}}$$

1. Un consommateur possède 50 unités du bien X et 100 unités du bien Y. Quelle est l'utilité totale ?

2. Tracer la courbe d'indifférence pour l'utilité totale obtenue au 1.

3. Si on augmente le nombre de bien X d'une unité, et que l'utilité totale reste identique, comment a varié le nombre de bien Y ?

4. Donner l'expression littérale du taux marginal de substitution.

5. Calculer le taux marginal de substitution pour 50 unités du bien X et 100 unités du bien Y.