II

Application 5 $g(x,y) = x^2 + y^2 + xy$

1. $\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{\partial g}{\partial x} = 2x + y \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} = 2y + x \end{array}}$

2. $\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2y + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ 2y + x = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ 2\times(-2x) + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ -4x + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ -3x = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -2x \\ x = \dfrac{0}{-3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2\times 0 = 0 \end{cases}$ $\boxed{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}}$

3. $g(0,0) = 0^2 + 0^2 + 0\times 0 = 0$

$\boxed{g(0,0) = 0}$

4. $\left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = x^2 + 2x\times\frac{1}{2}y + \left(\frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2$

$= x^2 + xy + \frac{1}{4}y^2 + \frac{3}{4}y^2$

$= x^2 + xy + y^2$

$= g(x,y)$

5. $g(x,y) = \left(x + \frac{1}{2}y\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 \geqslant 0$ pour tous x et y réels

6. Or $g(0,0) = 0$

Donc $g(x,y) \geqslant g(0,0)$ pour tous x et y réels

Donc la fonction g admet 0 comme minimum.

Il est atteint pour $x = 0$ et $y = 0$.

III

$\boxed{\text{Exercice 1}}$ $f(x,y) = 2x + y + 4xy$

1. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2 + 4y$

$\dfrac{\partial f}{\partial y} = 1 + 4x$

2. $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2 + 4y = 0 \\ 1 + 4x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4y = -2 \\ 4x = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} y = -\dfrac{2}{4} \\ x = -\dfrac{1}{4} \end{cases}$

$\boxed{\begin{matrix} x = -0{,}25 \\ y = -0{,}5 \end{matrix}}$

3. $f\left(-\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}\right) = 2 \times \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) + 4 \times \left(-\frac{1}{\cancel{4}}\right) \times \left(-\frac{1}{2}\right)$

$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$

$\boxed{f\left(-\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}}$

$f(0,0) = 2 \times 0 + 0 + 4 \times 0 \times 0 = 0$

$f(0,0) > f\left(-\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}\right)$

Donc $-\frac{1}{2}$ n'est pas un maximum de f.

$f(-1;0) = 2 \times (-1) + 0 + 4 \times (-1) \times 0 = -2$

$f(-1;0) < f\left(-\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}\right)$

Donc $-\frac{1}{2}$ n'est pas un minimum de f.

Exercice 2

$f(x,y) = e^{x^2+y^2}$

1. $\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x\,e^{x^2+y^2} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 2y\,e^{x^2+y^2} \end{array}}$

2. $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2 \times x \times e^{x^2+y^2} = 0 \\ 2 \times y \times e^{x^2+y^2} = 0 \end{cases}$

L'exponentielle est une fonction strictement positive, donc $e^{x^2+y^2} \neq 0$ pour tous x et y réels, donc

$\begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases}$ Donc $\boxed{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \end{array}}$

3. $f(0,0) = e^{0^2+0^2} = 1$

Pour tous x et y réels : $x^2 + y^2 \geqslant 0$

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc $e^{x^2+y^2} \geqslant e^0$

Donc $f(x,y) \geqslant 1$ pour tous x et y réel, donc $f(x,y) \geqslant f(0,0)$

Donc la fonction f admet 1 comme minimum.

Il est atteint en $x=0$ et $y=0$.

⚠ La question 3 est difficile !!!

Exercice 3

$$f(x,y) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y}$$

1. $$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{2}{x^3}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{1}{y^2}$$

2. Pour tous x et y réels $-\frac{2}{x^3} \neq 0$ et $-\frac{1}{y^2} \neq 0$
Donc f n'admet pas de point critique

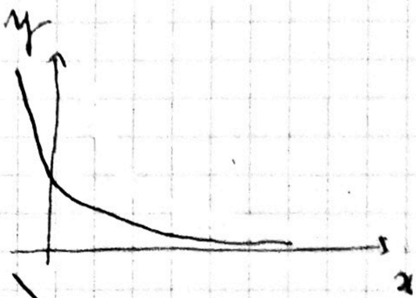
3. f n'admet pas de point critique, donc f n'admet ni minimum, ni maximum.

Exercice 4

$$U(x,y) = xy + 3y$$

1. $U(50, 100) = 50 \times 100 + 3 \times 100 = \boxed{5300}$

2. $$xy + 3y = 5300$$
$$y(x+3) = 5300$$
$$y = \frac{5300}{x+3}$$



3. $$U(x_1, y_1) = U(x_2, y_2)$$
$$x_1 y_1 + 3y_1 = x_2 y_2 + 3y_2$$
Or $x_2 = x_1 + 1$
$$x_1 y_1 + 3y_1 = y_2(x_2+3) = y_2(x_1+1+3)$$
$$y_2 = y_1 \times \frac{x_1+3}{x_1+4}$$
$$\Delta y = y_2 - y_1 = y_1\left(\frac{x_1+3}{x_1+4} - 1\right) = y_1\left(\frac{\cancel{x_1}+3-\cancel{x_1}-4}{x_1+4}\right)$$
$$\boxed{\Delta y = -\frac{y_1}{x_1+4}}$$

4. $\frac{\partial U}{\partial x} = y$ et $\frac{\partial U}{\partial y} = x + 3$

$$\boxed{TMS = -\frac{y}{x+3}}$$

5. $TMS(50, 100) = \boxed{-\frac{100}{53}}$