L2-S3 : UE Simulations numériques

SEANCE 6

Résolution d'équations différentielles

4 novembre 2024

Introduction

De nombreux problèmes issus de la physique, chimie, mécanique, biologie sont modélisés et la modélisation aboutit souvent à une équation différentielle. Quelques cas classiques sont :

- datation au carbone 14
- système proie-prédateur Lotka-Volterra
- modèle d'évolution de population
- systèmes en compétition
- pendule oscillant (un grand classique)
- cinétique en chimie (on a un système modélisant la concentration des espèces en réaction)
- orbite des planètes
- ressort
- etc..

Équations différentielles ordinaires

(par opposition aux Equations aux Dérivées Partielles)
Soit la variable réelle t et une fonction inconnue $y(t)$
On note les dérivées successives de $y(t)$ au point t : $y', y'', ..., y^{(n)}$.

Une équation différentielle (ED) ordinaire d'ordre n s'écriera :

$$f(t, y(t), y'(t), y''(t), ..., y^{(n)}(t)) = 0$$

Ceci est équivalent à l'équation différentielle normale d'ordre n :

$$y^{(n)} = F(y, y', y'', ..., y^{(n-1)}, t)$$

Dans le cas d'une ED ordinaire du premier ordre on aura :

$$y' = F(y, t) \text{ ou } \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = F(y, t)$$

Un éventuel second membre $g(t)$ sera inclus dans la fonction F.

Équations différentielles linéaires

Une ED d'ordre n est linéaire si elle a la forme générale suivante :

$$a_n(t)y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + ... + a_1(t)y' + a_0(t)y = g(t)$$

- tous les $y^{(i)}$ sont de degré 1, et
- tous les coefficients dépendent au plus de t

Exemple d'EDs

Exemple d'ED linéaire d'ordre 1 :

$$y'(t) = (1 - t^2)y(t)$$

s'écrit

$$y'(t) = F(y(t), t)$$

avec $F(a, b) = (1 - b^2)a$.

Équations différentielles linéaires ou non linéaires ? Donner leur ordre.....

$i.\ (y-x)dx + 4xdy = 0 \qquad ii.\ y'' - 2y' + y = 0 \qquad iii.\ \dfrac{d^3y}{dx^3} + x\dfrac{dy}{dx} - 5y = e^x$

$iv.\ (1-y)y' + 2y = e^x \qquad v.\ \dfrac{d^2y}{dx^2} + \sin y = 0 \qquad vi.\ \dfrac{d^4y}{dx^4} + y^2 = 0$

Résolution analytiques d'ED d'ordre 1

Exemple d'ED linéaire d'ordre 1 :

$$y'(t) + ky(t) = 0 \text{ avec } k \text{ réel}$$

La solution générale est de la forme :

$$y(t) = Ce^{-kt}$$

avec C réel à déterminer avec les conditions initiales.

Si pour t_0 on a $y(t_0) = y_0$, alors

$$C = y_0 e^{kt_0}$$

Solutions analytiques d'ED d'ordre 1

Exemple d'ED linéaire d'ordre 1 plus générale

$$a(t)y'(t) + b(t)y(t) = 0$$

La solution générale est de la forme :

$$y(t) = Ke^{-A(t)}$$

avec K constante déterminée avec les **conditions initiales**. D'où l'importance de connaître celles-ci pour résoudre nos equations !

$A(t)$ est une primitive de la fonction $b(t)/a(t)$.

Résolution numérique

En général, les équations différentielles ne sont pas toujours aussi simples que des ED linéaires du premier ordre. Les solutions analytiques ne sont pas toujours aussi simples à trouver :

- surtout si elles ne sont pas linéaires ;
- lorsque l'ordre augmente : méthode de réduction d'ordre donnant un système d'équations à résoudre.

Donc résolution numérique !

Méthode d'Euler : cas $n = 1$

Localement la courbe de $y(t)$ est approximée par sa tangente.
Donc pour $t_0 + h$ avec h petit, on peut écrire :

$$y(t_0 + h) \approx y(t_0) + hy'(t_0) = y(t_0) + hF(y(t_0), t_0)$$

On peut découper l'intervalle de temps complet $[t_0, t_f]$ en n pas de même longueur avec le pas :

$$h = \frac{t_f - t_0}{n}$$

Nous avons donc $n + 1$ temps $t_k = t_0 + kh$ avec $k = 0, 1, ..., n$ et la solution $y(t)$ est approximée à chaque temps t_k par y_k, calculé par la **relation de récurrence** :

$$y_{k+1} = y_k + hF(y_k, t_k), \quad y_0 = y(t_0)$$

Comme pour les méthodes d'intégration, plus le pas h est petit, meilleure sera l'approximation.

Fonction de Python

En utilisant la fonction `odeint` de la librairie `scipy.integrate`, on peut résoudre numériquement une ED du premier ordre du type :

$$y'(t) = F(y(t), t)$$

en connaissant la condition initiale $y(t_0) = y_0$.

In [1]:

```
from scipy.integrate import odeint
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

Il faut ensuite définir $F(y(t), t)$.

In [2]:

```
def F(y,t):
    yprime = (1 - t**2)*y
    return yprime
```

Fonction de Python

La fonction `odeint` prend en argument la fonction F, la condition initiale y_0, et les points d'échantillonnage de la variable t entre $[t_0, t_0 + T]$.

In [3]:

```python
t0 = 0
T = 10
y0 = [1]
temps = np.linspace(t0, t0+T, 100) # 100 points entre t0 et t0+T
Y = odeint(F, y0, temps)
print(Y)
```

Out[3]:

```
[[ 1.00000000e+00]
 [ 1.10590780e+00]
 [ 1.22051375e+00]
 ...
 [-8.29596499e-11]
 [-8.22953885e-11]
 [-8.16311270e-11]]
```

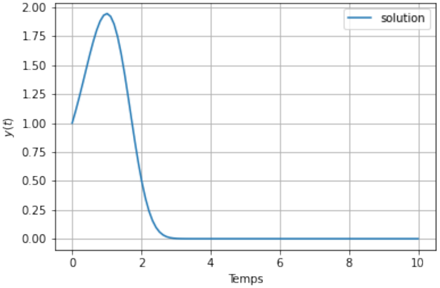
Dans `odeint`, F peut être toute fonction de y. On peut donc résoudre une ED du premier ordre **non-linéaire**.

Fonction de Python

Y contient tous les points $Y(t_k)$ solution de l'ED du premier ordre.

In [4]:

```
plt.plot(temps, Y.T[0], label="solution")
plt.grid(); plt.legend()
plt.xlabel('Temps'); plt.ylabel("$y(t)$")
plt.show()
```



Système d'équations différentielles couplées d'ordre 1

On définit le système d'équations différentielles d'ordre 1 avec second membre suivant :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -x(t) + y(t) + f(t), \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = x(t) - y(t) + g(t)$$

On peut réécrire ce système sans soucis en suivant la recette précédente :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = F(x(t), y(t), t), \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = G(x(t), y(t), t)$$

et l'intégrer par la méthode d'Euler :

$$x_{k+1} = x_k + hF(x_k, y_k, t_k), \quad x_0 = x(t_0)$$

$$y_{k+1} = y_k + hG(x_k, y_k, t_k), \quad y_0 = y(t_0)$$

Système d'équations différentielles couplées d'ordre 1

Pour résoudre un système d'équations différentielles couplées en Python (avec $f(t) = -2\sin(t)$, $g(t) = \cos(2t)$) :

In [5]:

```
def model(z,t):
    f, g = (-2*np.sin(t), np.cos(2*t))
    x,y = z[0],z[1]
    dxdt = -x + y + f
    dydt =  x - y + g
    return [dxdt,dydt]

temps = np.linspace(t0, t0+T, 100)
u0 = [1.,0]
u = odeint(model, u0, temps)
print(u)
```

Out[5]:

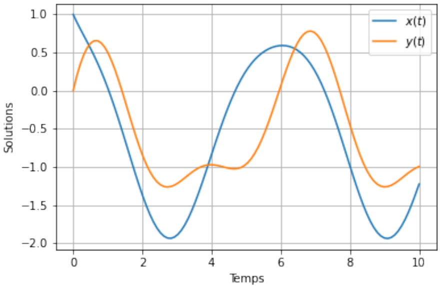
```
[[ 1.          0.        ]
 [ 0.90342956  0.18670052]
 [ 0.81328069  0.34261411]
 ...
 [-1.47844972 -1.04437818]
 [-1.35623673 -1.01682005]
 [-1.22616945 -0.99550089]]
```

Système d'équations différentielles couplées d'ordre 1

On fera attention au format retourné par la fonction `odeint` !

In [6]:

```
plt.plot(temps, u.T[0], label="$x(t)$")
plt.plot(temps, u.T[1], label="$y(t)$")
plt.grid(); plt.legend()
plt.xlabel('Temps'); plt.ylabel("Solutions")
plt.show()
```



Méthode d'Euler : cas $n > 1$

Les équations différentielles ordinaires d'ordre $n > 1$ peuvent être transformées en un **système couplé de** n **équations différentielles ordinaires d'ordre 1**, avec n fonctions différentes à intégrer.

De cette manière, celles-ci sont intégrables avec `odeint`.

Exemple : Pour un système harmonique d'inconnue $y(t)$ forcé par $f(t)$:

$$y''(t) + \frac{1}{\tau} y'(t) + \omega^2 y(t) = f(t)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y'(t) & = z(t) \\ z'(t) & = f(t) - \omega^2 y(t) - z(t)/\tau \end{cases}$$

on introduit une nouvelle fonction $z(t) = y'(t)$.

Il y a ainsi deux fonctions inconnues à intégrer : $y(t)$ et $z(t)$, avec un système de 2 EDO du premier ordre couplées.

Méthode d'Euler : cas $n > 1$

Pour cela on introduit :

$$F(y, z, t) = f(t) - \omega^2 y(t) - z(t)/\tau$$

et on résout le système d'équations différentielles couplées :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = z(t) \\ \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = F(y(t), z(t), t) \end{cases}$$

en utilisant la même méthode que pour d'autres équations différentielles couplées.
De manière générale, pour des équations d'ordre supérieur à 1, on peut toujours passer par un système d'EDO d'ordre 1.

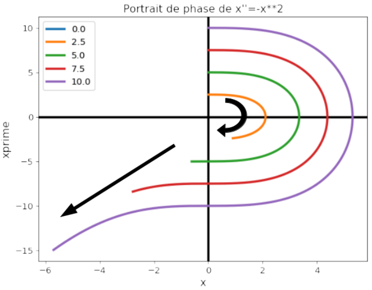
Espace des phases

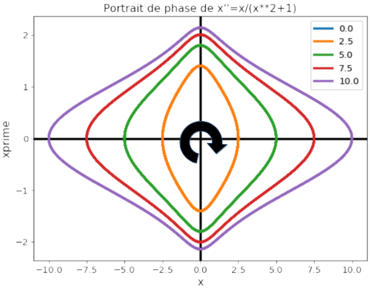
Pour un système physique, l'espace des phases décrit l'espace dans lequel vivent les variables dynamiques du système. Dans le cadre des équations différentielles, il existe des contraintes entre ces différentes variables dynamiques.

Pour un ressort, l'espace des phases peut être décrit par le couple de coordonnées $(x, \dot{x})$. Pour un pendule simple on pourra le décrire par le couple $(\theta, \dot{\theta})$

Espace des phases

- Les trajectoires au sein de l'espace des phases portent des caractéristiques spécifiques à l'équation différentielle. En particulier l'existence de trajectoires fermées ou ouvertes ou la présence de points fixes permet de comprendre des propriétés de stabilité des positions d'équilibre.
- Pour se faire une idée de la forme des trajectoires dans l'espace des phases on résout l'équation différentielle pour différentes conditions initiales.





Remise à l'échelle

- Lorsque l'on étudie une équation différentielle il est commun de réduire au minimum le nombre de paramètres qui la définit. Si l'on prend l'exemple de $\mathrm{d}y/\mathrm{d}t = -y/\tau$, on sait que la solution générale sera $y(t) = y_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$. On peut alors définir un temps réduit $u = t/\tau$ et réécrire l'équation $\mathrm{d}y/\mathrm{d}u = -y$ et écrire $y(u) = y_0 e^{-u}$.
- Dans le cas d'équations différentielles à multiples paramètres cela permet de restreindre l'étude de l'équation aux paramètres pertinents, de trouver des invariances d'échelles et de comparer des trajectoires entre-elles en définissant une échelle de longueur ou de temps en commun entre les différents systèmes physiques considérés.