Université Paris-Saclay, Faculté des Sciences d'Orsay, M1 MFL

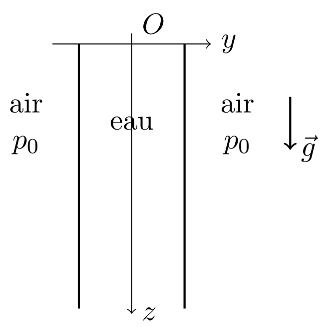
TD6 MMC Fluides/Mécanique des Fluides
Ecoulements de drainage dans les mousses

(D'après le sujet d'examen d'octobre 2010)

On s'intéresse ici à la "stabilité" de mousses, mousse de bière ou mousse de savon par exemple, constituées de bulles d'air séparées par des minces films liquides. Ces films liquides sont soumis à la gravité et s'amincissent donc progressivement par drainage. On considérera dans la suite la situation modèle d'un film liquide vertical de mousse d'eau savonneuse ou non. Dans le cas de mousses de savon, les "molécules de savon", appelés tensioactifs, se placent aux interfaces eau-air et les rigidifient de telle sorte que ces interfaces se comportent comme des parois solides (mais bien sûr déformables). On considérera dans tout ce problème les écoulements incompressibles. La viscosité dynamique de l'eau, savonneuse ou non, sera prise égale à $\eta = 10^{-3}$ Pa·s.

1 Ecoulement plan stationnaire dans un film de savon

On s'intéresse d'abord à l'écoulement dans un film de liquide (eau), plan, d'épaisseur b, qu'on considérera d'abord constante. Le film est dans l'air. On cherche une solution stationnaire d'écoulement parallèle.



1. Rappeler la définition d'un écoulement parallèle.
2. L'air, de part et d'autre du film liquide, étant à la pression atmosphérique p_0, que peut-t-on dire de la pression dans le film ? Que vaut donc le terme dp/dz ?
3. A quoi est dû l'écoulement d'eau dans le film ?
4. A quoi se réduit l'équation de Navier-Stokes gouvernant l'écoulement dans le film ? Justifier votre réponse.
5. En précisant les conditions aux limites aux "interfaces rigides", calculer le champ de vitesse et dessiner le profil de vitesse dans le film. Commenter ce profil.
6. Montrer que le débit (par unité de largeur transverse suivant x) s'écrit $q = \alpha b^3$, en précisant l'expression de α. En déduire l'expression de la vitesse moyenne débitante U. Calculer le nombre de Reynolds correspondant en fonction des paramètres du problème.
7. Application numérique : calculer la vitesse moyenne débitante U pour un film d'eau savonneuse d'épaisseur $b = 1$ mm. Calculer le nombre de Reynolds correspondant. Que pouvez-vous en conclure sur la nature de l'écoulement ? Laminaire ou turbulent ?

2 Écoulement dans un film de savon d'épaisseur lentement variable.

On considère maintenant un film toujours vertical dont les interfaces sont toujours rigidifiés par les tensioactifs, mais dont on stoppe l'alimentation en continu. L'épaisseur du film, $b(z,t)$, va donc varier, à partir de sa valeur initiale, b_0, au cours du temps t et le long de z. Dans cette situation de drainage de film accroché en $z = 0$, on considérera que le débit, et donc l'épaisseur $b(0,t)$ en amont, diminuent progressivement avec le temps jusqu'à s'annuler.

1. Montrer qualitativement que l'épaisseur du film $b(z,t)$ va varier en z et t. Dessiner a priori la forme du film à différents instants.

2. Ecrire l'équation de Navier-Stokes suivant la verticale z. A partir de la condition d'incompressibilité, en désignant par θ l'angle local des parois avec la verticale, pour un film supposé symétrique par rapport au plan (x,z), et en supposant que θ varie doucement avec z et reste toujours petit, que peut-on en conclure pour le rapport des vitesses verticale et horizontale u_y/u_z ? Quel terme visqueux de l'équation de Navier-Stokes suivant la verticale est-il prépondérant devant les autres ? Montrer qu'on peut négliger les termes non-linéaires devant le terme visqueux prépondérant à une condition sur le nombre de Reynolds et θ. On considérera cette condition satisfaite par la suite.

3. En raisonnant sur les ordres de grandeurs, à quelle condition le terme instationnaire est-il négligeable devant le terme visqueux ? On considérera cette condition satisfaite par la suite.

4. Compte tenu des approximations considérées dans les questions précédentes (2 et 3), et en considérant que le terme dp/dz est aussi négligeable à cet ordre d'approximation, écrire l'équation finale simplifiée. Comparer à l'équation obtenu à la question 7.1-4. En déduire l'expression de la vitesse verticale $u_z(y,z,t)$. Par quelle variable cette vitesse dépend-elle de z et de t ? En déduire le débit $q(z,t)$ de liquide s'écoulant (par unité de largeur transverse suivant x).

5. En raisonnant sur une bande de film d'épaisseur $b(z,t)$ située entre z et $z + dz$, montrer qu'on peut écrire la conservation de la masse (ou du volume) pendant un intervalle de temps élémentaire dt en considérant la variation de débit dq entre l'entrée et la sortie de cette bande et la variation d'épaisseur db pendant cet intervalle de temps élémentaire dt. Montrer qu'on aboutit à la relation simple

$$\frac{\partial q}{\partial z} = -\frac{\partial b}{\partial t}.$$

6. En réinjectant l'expression du débit dans l'équation précédente, montrer que cette équation admet les 2 solutions possibles : $b_1(z,t) = b_0$ et $b_2(z,t) = (\beta z/t)^{1/2}$ en précisant l'expression de β. Dessiner ces 2 solutions. Calculer la distance $z = z_c$ pour laquelle $b_2 = b_1$ à un instant t. Comment varie z_c avec t ? Quelle est la vitesse de déplacement de z_c ? Tracer l'allure correspondante du film avec les différentes zones, et discuter des domaines d'espace et de temps où les approximations faites risquent de ne pas être satisfaites.

7. Application numérique : calculer la vitesse de déplacement dz_c/dt du point d'amincissement pour un film d'épaisseur initiale $b_0 = 1$ mm.

3 Ecoulement stationnaire dans un film d'eau non savonneuse

On considère maintenant le cas d'un film vertical d'eau non savonneuse avec des interfaces eau-air classiques (les interfaces ne sont plus rigidifiés par les tensioactifs). Ces interfaces seront donc considérés comme des surfaces libres, sans contrainte exercée par l'air ambiant. On considère ici le régime d'écoulement stationnaire dans un film alimenté en continu par le haut, à débit constant.

1. Rappeler la condition à la limite sur une surface libre.

2. En supposant que l'angle des parois avec la verticale varie doucement avec la verticale et reste faible, justifier du fait qu'on puisse considérer d'une part que la pression est constante dans tout le film, d'autre part que le rapport des deux composantes de la vitesse soit tel que $u_y/u_z \ll 1$.

3. En considérant la condition à la limite sur les deux surfaces libres, justifier qu'on puisse considérer que la vitesse u_z soit ici indépendante de y. Justifier alors du fait qu'on puisse considérer l'écoulement dans le film comme un écoulement de fluide parfait, dont on rappellera la définition.

4. Ecrire alors, compte tenu des considérations des questions précédentes (**??** et **??**), la relation de Bernoulli sur une ligne de courant dans le film (attention à ne pas oublier que z est ici orienté vers le bas). En notant u_0 la vitesse de l'écoulement en $z = 0$, exprimer la vitesse u_z dans le film en fonction de z. En déduire le débit q (par unité de largeur transverse suivant x) en fonction de z.

5. En régime stationnaire, le débit varie-t-il le long du film ? En calculant le débit en haut du fil en fonction de u_0 et b_0, montrer que l'épaisseur du film peut se mettre sous la forme $b(z) = b_0(1 + \xi z)^{-1/2}$ en précisant l'expression de ξ. En déduire alors l'expression de $\tan\theta$ en fonction de z. Quel est le signe de θ? En déduire s'il y a amincissement ou épaississement du film. Que vaut θ en haut du film (en $z = 0$) et loin en aval (pour $z \to \infty$) ? Dessiner l'allure du profil du film $b(z)$. Discuter la forme de ce profil. À quoi est dû l'amincissement ? Calculer le nombre de Reynolds de l'écoulement en fonction de z. Augmente-t-il ou diminue-t-il le long de l'écoulement ?

6. Application numérique : calculer θ en $z = 0$ pour un film d'épaisseur $b = 1$ mm et une vitesse d'alimentation en haut $u_0 = 0,1$ m/s.

7. Réfléchir enfin à la forme du filet d'eau sortant d'un robinet. Pouvez-vous exprimer, par le même type de raisonnement que celui suivi précédemment, la variation du diamètre du filet d'eau en fonction de sa distance z en aval ? Commenter.