

TD5 MMC Fluides/Mécanique des Fluides

Écoulements parallèles

1 Écoulement de Poiseuille en tube cylindrique

On s'intéresse ici au régime stationnaire de l'écoulement d'un fluide visqueux incompressible dans une conduite cylindrique de rayon R et de très grande longueur L ($L \gg R$) suivant l'axe Oz . L'écoulement est induit par une différence de pression Δp entre l'entrée et la sortie du tube.

1. Compte tenu des symétries du problème, justifier de chercher une solution d'écoulement parallèle. Vérifier que ce type de solution satisfait bien à l'équation de conservation de la masse.
2. A quoi se réduisent les équations de Navier-Stokes pour cet écoulement parallèle? Que peut-on dire de la dépendance de la pression p suivant r et θ ? En considérant l'équation de Navier-Stokes dans la direction de l'écoulement, justifier que le gradient longitudinal de pression ne peut pas dépendre de z et qu'il est donc constant le long du tube.
3. En intégrant l'équation précédente et avec des conditions aux limites qu'on précisera, montrer que le profil de vitesse est parabolique avec une vitesse maximale au centre qu'on exprimera. Commenter le signe de la vitesse par rapport à celui du gradient de pression. Quel est le temps typique τ au bout duquel le régime stationnaire est établi lors du démarrage de l'écoulement.
4. Calculer le débit Q d'écoulement dans le tube. Commenter sa dépendance avec la viscosité, le gradient de pression et le rayon du tube R . En déduire la vitesse moyenne et sa relation avec la vitesse maximale.
5. Dessiner le profil de pression le long de l'axe du tube. Commenter.
6. Exprimer le nombre de Reynolds de l'écoulement.
7. Quelle serait la distance typique L_e à partir de laquelle le profil parabolique serait établi si le tube était issu d'un grand réservoir? A.N pour un écoulement d'huile 10 fois plus visqueuse que l'eau à la vitesse débitante de 1 m/s dans un tube de 1 cm de rayon : calculer Re , τ , L_e .

2 Écoulement de Couette cylindrique

Un dispositif de COUETTE¹ cylindrique est composé de deux cylindres concentriques de longueur L , de rayons intérieur R_1 et extérieur R_2 ($L \gg R_2 - R_1$). Un fluide de masse volumique ρ et de viscosité dynamique η est plac dans l'entrefer ($R_1 \leq r \leq R_2$) et le plus fréquent est faire tourner le cylindre intérieur à la vitesse angulaire constante Ω_1 . On s'intéressera ici au régime stationnaire de l'écoulement de base observé à nombre de Reynolds modéré.

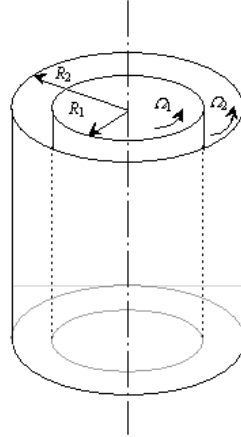


Figure 1: Dispositif de COUETTE cylindrique.

1. En considérant les symétries du système, justifier de chercher une solution d'écoulement parallèle. Vérifier que ce type de solution satisfait bien à l'équation de conservation de la masse.
2. A quoi se réduisent les équations de Navier-Stokes pour cet écoulement parallèle? Que peut-on dire de la dépendance de la pression suivant r , z et θ ?
3. En intégrant l'équation dans la direction de l'écoulement avec des conditions aux limites qu'on précisera, montrer que le profil de vitesse se compose de deux termes simples qu'on discutera. Quelle est la vorticité de cet écoulement? Quelle partie du champ de vitesse y contribue? La viscosité intervient-elle dans ce profil de vitesse? Pourquoi? Quel est le temps typique au bout duquel le régime stationnaire est établi.
4. Calculer le débit Q d'écoulement dans l'entrefer. En déduire la vitesse moyenne et le nombre de Reynolds de l'écoulement. A.N. pour une huile 100 fois plus visqueuse que l'eau dans un dispositif cylindrique de rayon intérieur 2 cm à la vitesse de rotation 1 rad/s dans un cylindre extérieur 3 cm.
5. Déterminer l'expression du couple Γ_1 nécessaire pour faire tourner le cylindre intérieur. A.N. pour un dispositif de longueur $L = 10$ cm. Quel est par ailleurs le couple sur le cylindre extérieur? Commenter.

¹MAURICE COUETTE (1858-1943) réalisa sa thèse théorique et expérimentale sur ce dispositif en 1888. Son appareil, construit par EUGÈNE DUCRETET (qui construisit aussi le premier télégraphe sans fil), était très ingénieux et lui permit de mesurer avec une grande précision la viscosité de l'eau et de l'air. En 1923, G.I. TAYLOR (1866-1975) montra à la fois théoriquement et expérimentalement la déstabilisation de l'écoulement de Couette en tourbillons annulaires contrarotatifs dans le cas où le cylindre intérieur tourne tandis que le cylindre extérieur est fixe.

Formulaire en coordonnées cylindriques (r, θ, z)

- Conservation de la masse :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

- Equation de Navier-Stokes :

$$\rho \left[\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} \right] = -\frac{\partial p}{\partial r} + \eta \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_r)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right] + \rho g_r$$

$$\rho \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_r u_\theta}{r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right] = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \eta \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(ru_\theta)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] + \rho g_\theta$$

$$\rho \left[\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z$$

- Tenseur des contraintes :

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= -p + 2\eta \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \sigma_{\theta\theta} &= -p + 2\eta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) \\ \sigma_{zz} &= -p + 2\eta \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \sigma_{r\theta} &= \eta \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right) \\ \sigma_{\theta z} &= \eta \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \\ \sigma_{zr} &= \eta \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \end{aligned}$$