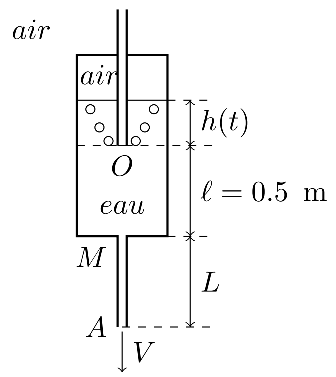
Université Paris-Saclay, Faculté des Sciences d'Orsay, M1 MFL

TD3 MMC Fluides/Mécanique des Fluides
Ecoulements de fluides parfaits

1 Vase de Mariotte

Le vase de Mariotte (schéma ci-dessous), contenant ici de l'eau est raccordé à un tube vertical de longueur L. La hauteur caractéristique ℓ du vase de Mariotte est ici 50 cm au dessus de laquelle l'intérieur du vase est connecté à l'air ambiant extérieur ($p_{atm} = 1,013$ bar), par un tube vertical. La pression de vapeur saturante de l'eau vaut $p_{vs} = 13$ millibars à température ambiante.



1. Quelle est la pression en O ? Exprimer la vitesse de sortie V de l'eau en A en fonction de L et l, indépendemment de $h(t)$, tant que le niveau de l'eau est au-dessus de l'orifice O. En déduire que le vase de Mariotte permet de vidanger un réservoir avec un débit constant, à la différence des réservoirs habituels.

2. Sachant que dans l'écoulement, la vitesse maximale est atteinte en un point M de la zone de raccordement, et qu'elle vaut $1,4V$, quelle longueur maximale L_{max} peut-on donner au tube sans qu'il y de cavitation ?

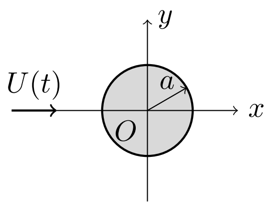
3. Discuter l'affirmation selon laquelle la vitesse en M est 1,4 fois supérieure à la vitesse en A.

2 Force de masse ajoutée

On considère l'écoulement bidimensionnel dans le plan horizontal (x, y) d'un fluide parfait incompressible de masse volumique ρ, autour d'un cylindre fixe de rayon a et d'axe (Oz). A grande distance du cylindre, la vitesse du fluide est uniforme mais dépend du temps avec l'expression $U(t)\vec{e_x}$. La solution de l'équation de Laplace $\Delta\phi = 0$ pour cet écoulement supposé irrotationnel de potentiel $\phi(r, \theta, t)$ s'écrit

$$\phi(r, \theta, t) = U(t) r \cos\theta \left(1 + \frac{a^2}{r^2}\right),$$

où (r, θ) sont les coordonnées polaires par rapport à l'axe de référence Ox.



1. Calculer les composantes du champ de vitesse $\vec{u}(r, \theta, t)$. Ce champ de vitesse satisfait-il bien aux conditions aux limites ? Dessiner le profil de vitesse sur les flancs du cylindre en $\theta = \pi/2$. Quelle est en particulier la vitesse à la surface du cylindre ? Commenter.

2. Après avoir exprimé la relation de la pression $p(r, \theta, t)$ dans le fluide en fonction de la vitesse et du potentiel de vitesse, calculer la pression à surface du cylindre. En déduire la force de trainée $F_D(t)$ exercée par le fluide sur le cylindre de longueur L. Que se passe-t-il si $dU/dt = 0$? Existe-t-il une force de portance ?

3. En considérant maintenant un cylindre mobile de vitesse $U(t)$ dans un fluide au repos, écrire l'équation fondamentale de la dynamique régissant le mouvement du cylindre de masse M. Montrer en quoi la force de traînée exprimée précédemment correspond à un effet de masse ajoutée caractérisée par la masse de fluide M_{AM}. Quelle est la valeur du coefficient correspondant de masse ajoutée C_{AM} ? Commenter.

4. Ecrire l'équation du mouvement pour une bulle de gaz de rayon a dans son mouvement instationnaire d'ascension dans l'eau à partir d'une position au repos, en considérant l'eau comme un fluide parfait et la bulle comme indéformable et de rayon constant. En considérant maintenant l'eau comme un fluide réel induisant en régime stationnaire une force de traînée inertielle avec le coefficient $C_x \simeq 0.4$, quel est le mouvement de la bulle ? En considérant maintenant un fluide plus visqueux induisant en régime stationnaire une force de traînée visqueuse, quel est le mouvement de la bulle ? Comment s'écrit dans chacun des cas (visqueux et inertiel) la condition à laquelle la bulle n'est pas (ou peu) déformée ? Quels sont les nombres sans dimension pertinents ? Dans chacun des cas (visqueux et inertiel), quel est le temps caractéristique τ de transitoire de mouvement avant le régime stationnaire ? Quelle est la distance caractéristique δ correspondante ? A.N. avec une bulle de rayon $a = 1$ mm dans l'eau ou dans du glycérol qu'on considérera 1000 fois plus visqueux que l'eau. Fait-on une petite ou une grosse erreur en ne considérant pas la force de masse ajoutée ?