Optimisation et Calcul Différentiel — Université Paris-Saclay
MDD 301 — 2024-2025

Partiel – Corrigé

Exercice 1 (Optimisation libre). **1.** La fonction f étant polynomiale, elle est de classe $\mathcal{C}^1$.

2. On calcule
$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 2(x-y) \\ 4y^3 + 2(x-y) \end{pmatrix}.$$

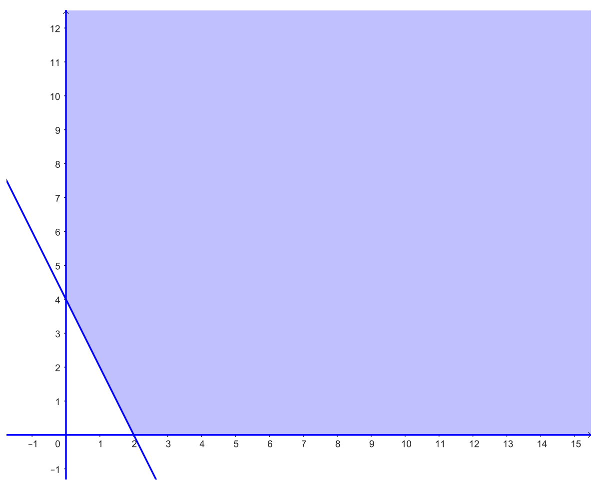
3. Si le gradient s'annule, on a $4x^3 = 2(x-y) = -4y^3$, donc $x^3 = -y^3$, c'est-à-dire $x = -y$. En remplaçant, on trouve $4x^3 = 4x$, ce qui donne $x = 0$ ou $x^2 = 1$. Ainsi, les points critiques sont $(0,0)$, $(1,-1)$ et $(-1,1)$.

4. La Hessienne de f est
$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 2 & 2 \\ 2 & 12y^2 - 2 \end{pmatrix}.$$

5. En $(1,-1)$, la matrice a pour déterminant $10 \times 10 - 2 \times 2 = 96 > 0$ et pour trace $20 > 0$, donc ses deux valeurs propres sont strictement positives. Ainsi, $(1,-1)$ est un minimum local.

6. On a
$$f\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \frac{2}{n^4} > 0$$
et
$$f\left(\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}\right) = \frac{2}{n^4} - \frac{4}{n^2}.$$
Or ce dernier terme est négatif dès que $2n^2 < n^4$, c'est-à-dire que $n^2 > 2$ (et donc $n \geqslant 2$). Ainsi, on peut trouver deux suites qui tendent vers $(0,0)$, l'une pour laquelle la valeur de f est strictement supérieure à $0 = f(0,0)$ et l'autre pour laquelle la valeur de f est strictement inférieure à $0 = f(0,0)$. Autrement dit, f n'a pas d'extremum local en $(0,0)$.

Exercice 2 (Le problème du régime alimentaire). **1.** Voici la figure :



2. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ puisqu'elle est polynomiale. Si elle avait un minimum global sur l'intérieur de $\mathcal{D}$, alors son gradient s'annulerait en ce point. Or, $\nabla f(x,y) = (3,2)$ ne s'annule jamais. Ainsi, f n'a pas d'extremum local sur l'intérieur de $\mathcal{D}$.

3. (a) On a $F_1(x) = 3x$, dont le minimum sur $[2;+\infty[$ est atteint pour $x = 2$ et vaut 6. De même, $F_2(y) = 2y$, dont le minimum sur $[4;+\infty[$ est atteint pour $y = 4$ et vaut 8.

   (b) Sur l'ensemble considéré, on a $y = 4 - 2x$, donc

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(x, 4-2x) \\ &= 3x + 2(4-2x) \\ &= 8 - x. \end{aligned}$$

   De plus, si x et y sont positifs, alors on doit avoir $x \leqslant 2$. Ainsi, on cherche le minimum global de la fonction $F_3 : x \mapsto 8 - x$ sur l'intervalle $[0;2]$. Celui-ci est atteint en $x = 2$ et vaut 6.

   (c) Nous savons que le minimum global n'est pas atteint sur l'intérieur de $\mathcal{D}$, c'est donc qu'il est atteint sur le bord. Pour trouver ce bord, il suffit de changer une par une les inégalités en égalités. Si $x = 0$, alors y peut prendre n'importe quelle valeur entre 4 et $+\infty$, donc on a une composante du bord égale à $\{0\} \times [4;+\infty[$. De même, si $y = 0$ alors x peut prendre n'importe quelle valeur entre 2 et $+\infty$, donc on a une composante du bord égale à $[2;+\infty[\times\{0\}$. Enfin, si $2x + y = 4$ alors la composante du bord est $\mathcal{D}'$. Autrement dit,

$$\partial\mathcal{D} = \{0\} \times [4;+\infty[\cup[2;+\infty[\times\{0\} \cup \mathcal{D}'$$

   et le minimum sur le bord est la plus petite valeur entre les minima sur chacune des trois composantes. Autrement dit, c'est 6, qui est atteint pour $x = 2$ et $y = 0$.

4. Le régime le plus économique correspond au point $(x,y) = (2,0)$, c'est-à-dire qu'il ne faut pas consommer de soja mais uniquement deux unités de lentilles par jour.

Exercice 3 (Optimisation sous contraintes d'égalité)**.** On considère l'ensemble

$$\mathcal{D} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 4y = 5 \quad \& \quad x^2 + z^2 = 2y\}.$$

Le but de cet exercice est de déterminer le point de $\mathcal{D}$ le plus proche de l'origine.

Partie I.

1. (a) La fonction f associe au point de coordonnées (x,y,z) le carré de sa distance à l'origine. Autrement dit, on veut minimiser la fonction $\sqrt{f}$, mais comme la fonction racine est croissante, cela est équivalent à minimiser f. Ainsi, c'est bien cette fonction qu'il faut minimiser, sous les contraintes $2x + 4y = 5$ et $x^2 + z^2 = 2y$.

   (b) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ car elle est polynomiale, et son gradient est $\nabla f(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$.

   (c) La fonction f admet un minimum global en $(0,0,0)$ puisqu'elle y vaut 0 alors que $f(x,y,z) \geqslant 0$ pour tout $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

2. On calcule :

$$\nabla g_1(x,y,z) = (2,4,0) \quad \& \quad \nabla g_2(x,y,z) = (2x, -2, 2z).$$

3. Comme on n'a que deux gradients, dire qu'ils sont libres revient à dire qu'ils ne sont pas colinéaires. Supposons qu'il existe λ tel que $\nabla g_1(x,y,z) = \lambda \nabla g_2(x,y,z)$. La troisième coordonnée donne $z = 0$ et la seconde donne $\lambda = -2$. On en déduit que $2 = -4x$ et donc que $x = -1/2$. La seconde contrainte donne alors $y = 1/8$, mais alors la première n'est pas satisfaite. Ainsi, les gradients des contraintes ne sont jamais colinéaires.

4. On cherche (x, y, z) pour lesquels il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda_1 \nabla g_1(x, y, z) + \lambda_2 \nabla g_2(x, y, z).$$

Ceci donne le système

$$\begin{cases} 2x &= 2\lambda_1 + 2\lambda_2 x \\ 2y &= 4\lambda_1 - 2\lambda_2 \\ 2z &= 2z\lambda_2 \end{cases}$$

Partie II.

5. (a) Si $z \neq 0$, alors $\lambda_2 = 1$ d'après la troisième équation, ce qui en remplaçant dans la première donne $\lambda_1 = 0$.

(b) La seconde équation donne $y = -1$, ce qui avec la première contrainte permet de déduire que $x = 9/2$.

(c) La seconde contrainte donne

$$z^2 = -\frac{9^2}{2^2} + 2 = -\frac{79}{4} < 0.$$

Ceci étant absurde, on conclut qu'il n'y a pas de point critique sous contraintes tel que $z \neq 0$.

6. (a) Si $z = 0$, la seconde contrainte donne $2y = x^2$, ce qui en remplaçant dans la première donne

$$2x + 2x^2 - 5 = 0.$$

Le discriminant de cette équation est $\Delta = 4 - 4 \times 2 \times (-5) = 44$ et les solutions sont donc

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{44}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{11}}{2}$$

et la valeur correspondante de y est (on fera attention au fait que le signe devant la racine carrée change)

$$y = \frac{x^2}{2} = \frac{6 \mp \sqrt{11}}{4}.$$

(b) La première contrainte donne $y = 5/4 - x/2$. En remplaçant dans la seconde équation on trouve

$$\frac{5}{4} - \frac{x}{2} = 2\lambda_1 - \lambda_2.$$

On peut alors écrire

$$\lambda_1 = (1 - \lambda_2)x = \left(1 + \frac{5}{4} - \frac{x}{2} - 2\lambda_1\right) x,$$

ce qui donne

$$(1 + 2x)\lambda_1 = \frac{9}{4}x - \frac{x^2}{2}.$$

Comme $1 + 2x \neq 0$, on peut diviser pour obtenir λ_1 en fonction de x. La seconde équation donne alors λ_2 en fonction de y et de λ_1, donc en fonction de x.

7. D'après ce qui précède, il y a deux points critiques sous contraintes, à savoir

$$\left(\frac{-1 + \sqrt{11}}{2}, \frac{6 - \sqrt{11}}{4}, 0\right) \quad \& \quad \left(\frac{-1 - \sqrt{11}}{2}, \frac{6 + \sqrt{11}}{4}, 0\right).$$

En effet, tous les autres points ont été exclus, et pour ceux-là on a montré l'existence des multiplicateurs de Lagrange.

8. (a) Soit $(x, y, z) \in \mathcal{D}$. Alors, $2y = 5/2 - x$ d'après la première contrainte, ce qui en remplaçant dans la seconde donne

$$x^2 + z^2 = \frac{5}{2} - x.$$

En passant regroupant les termes en x on a finlament

$$x^2 + x + z^2 = \frac{5}{2},$$

et donc

$$\begin{aligned}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + z^2 &= x^2 + x + \frac{1}{4} + z^2 \\ &= \frac{5}{2} + \frac{1}{4} \\ &= \frac{11}{4}.\end{aligned}$$

(b) Les fonctions g_1 et g_2 étant polynomiales, elles sont en particulier continues, donc

$$\mathcal{D} = g_1^{-1}(\{0\}) \cap g_2^{-1}(\{0\})$$

est fermé. Par ailleurs, si $(x, y, z) \in \mathcal{D}$, alors d'après la question précédente, on a $(x+1/2)^2 \leqslant 11/4$ et $z^2 \leqslant 11/4$, donc $x \in [-\sqrt{11}4-1/2; \sqrt{11}4+1/2]$ et $z \in [-\sqrt{11}4; \sqrt{11}4]$. Autrement dit, ces deux coordonnées sont bornées. Comme $y = 5/4 - x/2$ d'après la première contrainte, y est également bornée. Nous avons montré que $\mathcal{D}$ est fermée et bornée, c'est donc un compact.

(c) Comme f est polynomiale, elle est continue sur le compact $\mathcal{D}$ et y admet donc un minimum global. Par ailleurs, comme les gradients de g_1 et g_2 ne sont pas colinéaires, le minimum est atteint en un point critique sous contrainte. On calcule :

$$f\left(\frac{-1+\sqrt{11}}{2}, \frac{6-\sqrt{11}}{4}, 0\right) = \frac{12-2\sqrt{11}}{4} + \frac{47-12\sqrt{11}}{16} = \frac{95-20\sqrt{11}}{16}$$

$$f\left(\frac{-1-\sqrt{11}}{2}, \frac{6+\sqrt{11}}{4}, 0\right) = \frac{12+2\sqrt{11}}{4} + \frac{47+12\sqrt{11}}{16} = \frac{95+20\sqrt{11}}{16}$$

Ainsi, le point de $\mathcal{D}$ le plus proche de l'origine est le premier.