Planche 5

Être ou ne pas être : libre, génératrice, injective, de bonne composition,...

Exercice 46 ().

1. Déterminer si $X \in \text{Vect}(X-1, X^2+X+1)$ en précisant s'il existe une seule, plusieurs ou aucun manière d'exprimer X comme une combinaison linéaire de ces deux polynômes.
2. Déterminer si $X \in \text{Vect}(X-1, X+1, X^2+X+1)$ en précisant s'il existe une seule, plusieurs ou aucun manière d'exprimer X comme une combinaison linéaire de ces trois polynômes.
3. Déterminer si $X \in \text{Vect}(1, X-1, X+1, X^2+X+1)$ en précisant s'il existe une seule, plusieurs ou aucun manière d'exprimer X comme une combinaison linéaire de ces quatre polynômes.

Correction

1. $X \in \text{Vect}(X-1, X^2+X+1)$ *si et seulement s'il existe* $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ *tels que*

$$X = \lambda_1(X-1) + \lambda_2(X^2+X+1)$$

autrement dit que

$$X = \lambda_2 X^2 + (\lambda_1+\lambda_2)X + \lambda_2 - \lambda_1$$

En identifiant les termes à gauche et à droite de l'égalité on obtient alors le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$

On aurait alors $\lambda_1 = 1$ *avec la ligne 2 mais* $\lambda_1 = 0$ *avec la ligne 3, ce qui n'est pas compatible. Donc*

$$X \notin \text{Vect}(X-1, X^2+X+1)$$

2. $X \in \text{Vect}(X-1, X+1, X^2+X+1)$ *si et seulement s'il existe* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ *tels que*

$$X = \lambda_1(X-1) + \lambda_2(X+1) + \lambda_3(X^2+X+1)$$

autrement dit tels que

$$X = \lambda_3 X^2 + (\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)X + \lambda_2 - \lambda_1 + \lambda_3$$

En identifiant les termes à gauche et à droite de l'égalité on obtient alors le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

En effectuant $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$ on obtient le système équivalent :

$$\begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 1 \end{cases}$$

En permutant les lignes on a donc un système échelonné, sans paramètre donc qui possède une seule solution : $\lambda_3 = 0$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}$, et $\lambda_1 = \frac{1}{2}$. Donc

$$X \in \mathrm{Vect}(X-1, X+1, X^2+X+1)$$

3. *On sait déjà que $X \in \mathrm{Vect}(1, X-1, X+1, X^2+X+1)$ puisque $X \in \mathrm{Vect}(X-1, X+1, X^2+X+1)$. Pour déterminer le nombre de possibilités d'écrire X selon cette famille génératrice, on cherche $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tels que*

$$X = \lambda_0 + \lambda_1(X-1) + \lambda_2(X+1) + \lambda_3(X^2+X+1)$$

autrement dit tels que

$$X = \lambda_3 X^2 + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)X + \lambda_2 - \lambda_1 + \lambda_3 + \lambda_0$$

En identifiant les termes à gauche et à droite de l'égalité on obtient alors le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ \lambda_0 - \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Le système est échelonné (il suffit de changer l'ordre des lignes) avec 3 pivots et un paramètre, donc il possède une infinité de solutions.

Exercice 47 ().

Démontrer que les applications linéaires définies ci-dessous sont injectives *(on ne demande pas de montrer que ces applications sont bien linéaires, mais c'est un bon exercice)* :

1. L'application linéaire

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$

2. Soit $n \geq 1$ un entier. On pose $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible et on considère l'application linéaire φ_M définie pour tout $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :

$$\varphi_M(P) = MP$$

3. L'application linéaire

$$I : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \\ f & \mapsto & F \end{array}$$

où F est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $F(x) = \int_0^x f(t)\mathrm{dt}$

4. L'application linéaire

$$\begin{array}{cccc} \Delta & : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ & & P(X) & \mapsto & P(X+1)+P(X) \end{array}$$

(indication : on pourra s'intéresse au degré de $\Delta\big(P(X)\big)$)

Correction

Il s'agit de montrer à chaque fois que le noyau de l'application linéaire est l'ensemble $\{0\}$.

1. *On a :*

$$f(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \\ \quad\; y=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \quad =0 \\ x \quad =0 \\ \quad y=0 \end{cases}$$

Donc $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est bien le seul élément de $\ker f$. Ainsi, f est injective.

2. *On a :*

$$\begin{aligned} \varphi_M(P) = 0 &\Leftrightarrow MP = 0 \\ &\Leftrightarrow M^{-1}MP = M^{-1}0 \\ &\Leftrightarrow P = 0 \end{aligned}$$

Ainsi, 0 est le seul élément de $\ker \varphi_M$ et donc φ_M est injective.

3. *Soit $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $I(f)=0$. Alors 0 est une primitive de f. Or la dérivée de 0 est la fonction nulle donc $f=0$. Ainsi, $\ker I = \{0\}$ et donc f est injective.*

4. *Soit $P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\Delta(P(X)) = 0$.*
Si $P(X)$ est de degré k, alors $P(X+1)+P(X)$ est aussi de degré k car $(X+1)^k+X^k = 2X^k + \dots$. Donc, puisque $P(X+1)+P(X)=0$, $P(X)$ est de degré 0, c'est-à-dire constant. Posons donc $P(X)=c$.
Mézalor, $P(X+1)+P(X)=2c$. Et donc nécessairement $c=0$, et donc $P(X)=0$.
Ainsi, $\ker(\Delta)=\{0\}$ et Δ est injective.

Exercice 48 ().
Soient v_1, v_2, v_3 les trois vecteurs suivants :

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On pose $E = \operatorname{Vect}\big(v_1, v_2, v_3\big)$.
Démontrer que :

1. $E = \operatorname{Vect}\big(v_1+v_2, 2v_2+v_3, v_3-2v_1-v_2\big)$.

2. Si $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre *(hypothèse oubliée dans l'énoncé initial de la question)*, $E \neq \operatorname{Vect}\big(v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_3 - v_2\big)$.

Conjecturer alors le plus précisément possible une propriété permettant de transformer une famille génératrice d'un espace vectoriel en une autre famille génératrice de cet espace.

Correction

1. *Il s'agit de démontrer que*

$$\operatorname{Vect}\big(v_1, v_2, v_3\big) = \operatorname{Vect}\big(v_1 + v_2, 2v_2 + v_3, v_3 - 2v_1 - v_2\big)$$

On va donc procéder par double inclusion, et par stabilité par combinaisons linéaires il suffit de démontrer l'appartenance des vecteurs d'une famille génératrice pour en déduire l'inclusion.

Montrons d'abord $\boxed{\subset}$ *:*

On a, à l'œil aguerri (mais sinon on fait un système linéaire pour trouver les coefficients de la combinaison linéaire) :

$$v_1 = 3 \times (v_1 + v_2) + (v_3 - 2v_1 - v_2) - (2v_2 + v_3) \in \operatorname{Vect}\big(v_1 + v_2, 2v_2 + v_3, v_3 - 2v_1 - v_2\big)$$

On a, à l'œil toujours aussi aguerri :

$$v_2 = (2v_2 + v_3) - (v_3 - 2v_1 - v_2) - 2 \times (v_1 + v_2) \in \operatorname{Vect}\big(v_1 + v_2, 2v_2 + v_3, v_3 - 2v_1 - v_2\big)$$

et enfin, puisqu'on n'a pas toujours l'œil aguerri, cherchons $x, y, z \in \mathbb{R}$ *tels que :*

$$v_3 = x(v_1 + v_2) + y(2v_2 + v_3) + z(v_3 - 2v_1 - v_2)$$

c'est-à-dire tels que

$$v_3 = (x - 2z)v_1 + (x + 2y - z)v_2 + (y + z)v_3$$

Une solution du système linéaire suivant convient :

$$\begin{cases} x \phantom{{}+2y} - 2z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ \phantom{x+{}} y + z = 1 \end{cases}$$

En effectuant $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ *on obtient :*

$$\begin{cases} x \phantom{{}+2y} - 2z = 0 \\ 2y + z = 0 \\ y + z = 1 \end{cases}$$

Puis en effectuant $L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2$ *:*

$$\begin{cases} x \phantom{{}+2y} - 2z = 0 \\ 2y + z = 0 \\ z = 2 \end{cases}$$

Ainsi $z = 2$, $y = -1$ et $x = 4$, c'est-à-dire que

$$v_3 = 4(v_1 + v_2) - (2v_2 + v_3) + 2(v_3 - 2v_1 - v_2) \in \text{Vect}\left(v_1 + v_2, 2v_2 + v_3, v_3 - 2v_1 - v_2\right)$$

(on comprend alors que à l'œil, même aguerri, ça devenait compliqué) *On a donc, par stabilité par combinaisons linéaire :*

$$\text{Vect}\left(v_1, v_2, v_3\right) \subset \text{Vect}\left(v_1 + v_2, 2v_2 + v_3, v_3 - 2v_1 - v_2\right)$$

Réciproquement, montrons $\boxed{\supset}$ *: on a immédiatement*

$$v_1+v_2 \in \text{Vect}\left(v_1, v_2, v_3\right) \qquad 2v_2+v_3 \in \text{Vect}\left(v_1, v_2, v_3\right) \qquad v_3-2v_1-v_2 \in \text{Vect}\left(v_1, v_2, v_3\right)$$

puisque tous ces vecteurs sont naturellement des combinaisons linéaires de v_1, v_2, v_3. On conclut alors comme précédemment que

$$\text{Vect}\left(v_1 + v_2, 2v_2 + v_3, v_3 - 2v_1 - v_2\right) \subset \text{Vect}\left(v_1, v_2, v_3\right)$$

Et donc par double inclusion on a l'égalité.

2. *Comme dans la question précédente, on a immédiatement*

$$\text{Vect}\left(v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_3 - v_2\right) \subset \text{Vect}\left(v_1, v_2, v_3\right)$$

Donc pour montrer que les deux ensembles ne sont pas égaux on cherche un vecteur $v \in \text{Vect}\left(v_1, v_2, v_3\right)$ tel que $v \notin \text{Vect}\left(v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_3 - v_2\right)$. N'allons pas chercher trop loin, regardons pour v_1, v_2 ou v_3 !
On cherche alors $x, y, z \in \mathbb{R}$ tels que

$$v_1 = x(v_1 + v_2) + y(v_1 + v_3) + z(v_3 - v_2)$$

c'est-à-dire

$$(x + y - 1)v_1 + (x - z)v_2 + (y + z)v_3 = 0$$

Or, comme la famille $\{v_1, v_2, v_3\}$ est libre on obtient le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

En effectuant $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ on a :

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ - y - z = -1 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

puis $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$:

$$\begin{cases} x+y & =1 \\ \quad -y-z & =-1 \\ \qquad\quad 0 & =-1 \end{cases}$$

Ce système étant incompatible, $v_1 \notin \text{Vect}\big(v_1+v_2, v_1+v_3, v_3-v_2\big)$ *et donc* $E \neq \text{Vect}\big(v_1+v_2, v_1+v_3, v_3-v_2\big)$.

Exercice 49 ().
Soit E un espace vectoriel et soit $f : E \to E$ un endomorphisme.
On rappelle qu'on peut alors définir pour tout entier $n \geq 1$ l'endomorphisme f^n définit par :

$$\text{pour tout } x \in E,\ f^n(x) = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}(x) = \underbrace{f\big(f(\ldots f(x))\big)}_{f \text{ appliqué } n \text{ fois}}$$

On suppose dans cet exercice qu'il existe un entier $N \geq 1$, tel que $f^N = 0$

1. Démontrer que la seule valeur propre possible pour f est 0.
2. Effectuer un raisonnement analogue permettant de démontrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $A^N = 0$, alors la seule valeur propre possible pour A est 0.

Correction

1. *Soit* $\lambda \in \mathbb{R}$ *une valeur propre de* f *et* $x \in E$ *un vecteur propre associé, avec* $x \neq 0$.
   On a donc $f(x) = \lambda x$.
   Ainsi,

$$\begin{aligned} f(f(x)) &= f(\lambda x) && \textit{puisque } f(x)=\lambda x \\ &= \lambda f(x) && \textit{par linéarité} \\ &= \lambda^2 x && \textit{puisque } f(x)=\lambda x \end{aligned}$$

   De même,

$$\begin{aligned} f^3(x) &= f(f^2(x)) \\ &= f(\lambda^2 x) && \textit{d'après le calcul précédent} \\ &= \lambda^2 f(x) && \textit{par linéarité} \\ &= \lambda^3 x && \textit{puisque } f(x)=\lambda x \end{aligned}$$

   Ainsi, par récurrence immédiate, $f^n(x) = \lambda^n x$ *pour tout entier* $n \geq 1$.
   En particulier $f^N(x) = \lambda^N x$ *et comme* $f^N = 0$ *on a :*

$$\lambda^N x = 0$$

   Or $x \neq 0$ *donc* $\lambda^N = 0$ *et donc* $\lambda = 0$. *Ainsi la seule valeur propre possible est* 0.
2. *On procède de même, en partant de* $Ax = \lambda x$ *pour un vecteur* $x \neq 0$ *de* $\mathbb{R}^n$, *en écrivant* $A^2x = AAx = A\lambda x = \lambda Ax = \lambda^2 x$ *etc...*

Exercice 50 ().
Soient E et F deux espaces vectoriels, et $u : E \to F$ une application linéaire. Soit $n \geq 1$ un entier, on considère une famille $(e_1, \ldots, e_n)$ de vecteurs de E.

1. Démontrer que si $(e_1, \dots, e_n)$ est liée alors $\big(u(e_1), \dots, u(e_n)\big)$ est liée.
2. Démontrer que si $(e_1, \dots, e_n)$ est libre et si u est injective, alors $\big(u(e_1), \dots, u(e_n)\big)$ est libre.

Correction

1. *On suppose que la famille* $\{e_1, \dots, e_n\}$ *est liée, c'est-à-dire qu'il existe des réels* $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ *pas tous égaux à 0 tels que :*
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$$
Alors
$$u\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\Big) = u(0)$$
Or u est linéaire donc $u(0) = 0$ et donc par linéarité :
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u(e_i) = 0$$
Ce qui signifie exactement que la famille $\{u(e_1), \dots, u(e_n)\}$ *puisqu'il y a des coefficients de la combinaison linéaire qui ne sont pas nuls (c'est l'hypothèse de départ !)*
2. *On suppose que u est injective et que* $\{e_1, \dots, e_n\}$ *est libre. Démontrons que la famille* $\{u(e_1), \dots, u(e_n)\}$ *est libre.*
Supposons donc que
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u(e_i) = 0$$
et démontrons que $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$.
Par linéarité, on a
$$u\Big(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\Big) = 0$$
Ainsi $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i \in \ker u$. *Or u est injective donc* $\ker u = \{0\}$ *et donc*
$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0$$
Or, puisque la famille $\{e_1, \dots, e_n\}$ *est libre, la seule solution possible est* $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$. *C'est ce qu'il fallait démontrer.*

Exercice 51 ().
Soit E un espace vectoriel et soit $f : E \to E$ un endomorphisme.
On rappelle qu'on peut alors définir pour tout entier $n \geq 1$ l'endomorphisme f^n définit par :
$$\text{pour tout } x \in E,\ f^n(x) = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}(x) = \underbrace{f\big(f(\dots f(x))\big)}_{f \text{ appliqué } n \text{ fois}}$$
On suppose dans cet exercice qu'il existe un entier $N \geq 1$, tel que $f^N = 0$ mais tel que $f^{N-1} \neq 0$ (f est alors dit *nilpotent* d'indice N).

1. Que désigne ce "0" dans les relations ci-dessus ?
2. Que vaut, pour tout $x \in E$, $f^N(x)$?
3. Parmi les deux reformulations ci-dessous, laquelle traduit l'hypothèse $f^{N-1} \neq 0$? Expliquer.
   (a) Pour tout $x \in E$, $f^{N-1}(x) \neq 0$
   (b) Il existe $x \in E$ vérifiant $f^{N-1}(x) \neq 0$
4. Soit $v \in E$ vérifiant $f^{N-1}(v) \neq 0$. Démontrer que la famille $\{v, f(v), f^2(v), \dots, f^{N-1}(v)\}$ est libre.

Correction

1. *Dans les égalités $f^N = 0$ et $f^{N-1} \neq 0$, puisque f^N et f^{N-1} sont des applications linéaires, 0 désigne l'application linéaire nulle, c'est-à-dire l'application qui envoie tout vecteur de E sur le vecteur nulle (0_E).*
2. *On déduit de l'explication précédente que pour tout $x \in E$, $f^N(x) = 0$.*
3. *$f^{N-1} \neq 0$ signifie que l'application linéaire f^{N-1} n'est pas l'application nulle, c'est-à-dire qu'elle n'envoie pas tous les vecteurs sur 0, ou encore qu'il existe au moins un vecteur qui n'a pas pour image 0. Autrement dit, c'est la phrase b) qui est correcte.*
4. *Soit $v \in E$ vérifiant $f^{N-1}(v) \neq 0$. Démontrons que la famille $\{v, f(v), f^2(v), \dots, f^{N-1}(v)\}$ est libre.*
   Supposons donc que
   $$\lambda_0 v + \lambda_1 f(v) + \cdots + \lambda_{N-1} f^{N-1}(v) = 0$$
   et démontrons que $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_{N-1} = 0$.
   En appliquant f^{N-1} à l'égalité, on a par linéarité (et puisque $f^{N-1}(0) = 0$ également par linéarité de l'application f^{N-1} :
   $$\lambda_0 f^{N-1}(v) + \lambda_1 f^N(v) + \cdots + \lambda_{N-1} f^{2N-2}(v) = 0$$
   Or, puisque $f^N = 0$ (et que par conséquent $f^k = 0$ dès que $k \geq N$), il reste simplement :
   $$\lambda_0 f^{N-1}(v) = 0$$
   Or, $f^{N-1}(v) \neq 0$ donc nécessairement $\lambda_0 = 0$.
   On en déduit, en reprenant l'équation de départ, que
   $$\lambda_1 f(v) + \cdots + \lambda_{N-1} f^{N-1}(v) = 0$$
   En appliquant cette fois f^{N-2}, on obtient par un raisonnement analogue $\lambda_1 f^{N-1}(v) = 0$ et donc $\lambda_1 = 0$. En réitérant ainsi le raisonnement en appliquant $f^{N-3}, f^{N-4}, \dots, f$, on obtient $\lambda_0 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_{N-2} = 0$. À la dernière étape il reste alors simplement $\lambda_{N-1} f^{N-1}(v) = 0$ et on conclut alors comme précédemment que $\lambda_{N-1} = 0$.
   Ainsi, tous les coefficients de la combinaison linéaire sont nulles et donc la famille est bien libre.

Exercice 52 ().
Soit G un espace vectoriel. Soient $p \geq 1$ et $n \geq 1$ deux entiers. Soit E et F deux sous-espaces vectoriels de G ayant respectivement pour famille génératrice $(e_1, \dots, e_p)$ et $(f_1, \dots, f_n)$.

Démontrer que $(e_1, \ldots, e_p, f_1, \ldots, f_n)$ est une famille génératrice de $E+F$.

Correction

Il s'agit de démontrer que

$$E+F = \mathrm{Vect}\left(e_1, \ldots, e_p, f_1, \ldots, f_n\right)$$

Procédons par double inclusion.
Montrons d'abord $\boxed{\supset}$ *: pour tout* $i \in \{1, \ldots, p\}$ *et pour tout* $j \in \{1, \ldots, n\}$, $e_i = e_i + 0_F$ *et* $f_j = 0_E + f_j$ *donc on a*

$$e_i \in E+F \qquad f_j \in E+F$$

(on pourrait aussi le justifier en disant que $E \subset E+F$ *et* $F \subset E+F$*). Ainsi, par stabilité par combinaisons linéaires (puisque* $E+F$ *est un espace vectoriel), on en déduit l'inclusion.*
Montrons maintenant $\boxed{\subset}$.
Soit $v \in E+F$*, et démontrons que* $v \in \mathrm{Vect}\left(e_1, \ldots, e_p, f_1, \ldots, f_n\right)$.
On peut écrire $v = v_1 + v_2$ *avec* $v_1 \in E$ *et* $v_2 \in F$.
Or, puisque $v_1 \in E$ *et que* $E = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$, $v_1 \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p)$*. Or toute combinaison linéaire de* $e_1, \ldots, e_p$ *est aussi une combinaison linéaire des* $e_1, \ldots, e_p, f_1, \ldots, f_n$ *(on prend* 0 *comme coefficient pour les vecteurs* $f_1, \ldots, f_n$*). Ainsi,* $v_1 \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p, f_1, \ldots, f_n)$*. De même,* $v_2 \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p, f_1, \ldots, f_n)$ *et donc par stabilité par combinaison linéaire (puisque* $\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p, f_1, \ldots, f_n)$ *est par définition un espace vectoriel),*

$$v_1 + v_2 \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p, f_1, \ldots, f_n)$$

Donc $v \in \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p, f_1, \ldots, f_n)$*, ce qui démontre l'inclusion.*
Ainsi par double inclusion on a l'égalité énoncée.

Exercice 53 ().
Dans cet exercice, on considère deux endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ définis de la manière suivante :

- f_θ représente la rotation d'angle θ autour de l'origine $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- s_x représente la symétrie par rapport à l'axe des abscisses

En raisonnant graphiquement :

1. Déterminer une valeur de θ tel que $f_\theta \circ s_x \neq s_x \circ f_\theta$
2. Déterminer une valeur de θ tel que $f_\theta \circ s_x = s_x \circ f_\theta$

Correction

En testant des valeurs "simples" de θ $(\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4})$ *on constate que pour tout vecteur* $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ *on a :*

$$f_\pi \circ s_x(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}) = s_x \circ f_\pi(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix})$$

c'est-à-dire que faire d'abord la symétrie, puis la rotation d'angle π*, revient au même que faire d'abord la rotation d'angle* π*, puis la symétrie.*

Au contraire, si $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ on constate que :

$$f_{\frac{\pi}{2}} \circ s_x(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

alors que

$$s_x \circ f_{\frac{\pi}{2}}(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}) = \begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$$

et donc $f_{\frac{\pi}{2}} \circ s_x \neq s_x \circ f_{\frac{\pi}{2}}$ (pour que les deux applications soient différentes il suffit de trouver un exemple d'un vecteur qui n'a pas la même image par ses deux application.

Exercice 54 ().

On pose $t \in \mathbb{R}$ et on considère la famille de vecteurs suivante :

$$\begin{pmatrix}1\\0\\t\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\1\\t\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}t\\0\\1\end{pmatrix}$$

Le but est de déterminer pour quelle(s) valeur(s) de t cette famille est libre.

1. Expliquer pourquoi cela revient à se demander pour quelle valeur de t la matrice $\begin{pmatrix}1 & 1 & t\\0 & 1 & 0\\t & t & 1\end{pmatrix}$ est injective.
2. En déduire que cela revient à se demander pour quelle valeur de t la matrice $\begin{pmatrix}1 & 1 & t\\0 & 1 & 0\\t & t & 1\end{pmatrix}$ est inversible *(vous pouvez par exemple utiliser le théorème du rang matriciel)*
3. Conclure à l'aide du calcul du déterminant de cette matrice.

Correction

1. *Pour déterminer si la famille est libre, on cherche à résoudre l'équation suivante :*

$$x\begin{pmatrix}1\\0\\t\end{pmatrix} + y\begin{pmatrix}1\\1\\t\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}t\\0\\1\end{pmatrix} = 0$$

Si on trouve que $x = y = z = 0$ c'est que la famille est libre, sinon c'est qu'elle est liée.
Or cette équation est équivalent, par définition du produit matrice-vecteur, à :

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & t\\0 & 1 & 0\\t & t & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = 0$$

c'est-à-dire que cela revient à calculer $\ker A$.

Ainsi, dire que la famille est libre équivaut à dire que $\ker A = \{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\}$, ce qui équivaut à dire que A est injective.

2. *Comme A est une matrice carrée, une conséquence du théorème du rang est que A est inversible si et seulement si $\ker A = \{0\}$. Donc la question revient bien à déterminer pour quelle(s) valeur(s) de t la matrice A est inversible.*
3. *En développant par rapport à la deuxième ligne, on a :*

$$\det(A) = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{vmatrix} = 1 - t^2$$

Or A est inversible si et seulement si $\det(A) = 0$ donc lorsque $t = 1$ ou $t = -1$. Finalement, la famille initiale est libre si et seulement si $t = 1$ ou $t = -1$.

Exercice 55 ().
On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui transforme tout point (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ en $(x, y, 0)$. On note p cet endomorphisme.

1. Faire un dessin illustrant ce que fait l'application p.
2. Démontrer que $p \circ p = p$.
3. Démontrer que $\ker p \cap \operatorname{Im} p = \{0\}$. On dit alors que ces deux espaces sont *en somme directe* et on notera leur somme $\ker p \oplus \operatorname{Im} p$ au lieu de $\ker p + \operatorname{Im} p$.
4. Décomposer $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ comme la somme d'un vecteur de $\ker p$ et d'un vecteur de $\operatorname{Im} p$, à déterminer tous les deux. En déduire que
$$\mathbb{R}^3 = \ker p \oplus \operatorname{Im} p$$
5. Démontrer que si quelqu'un trouvait une décomposition différente de la votre cela contredirait le fait que $\ker p \cap \operatorname{Im} p = \{0\}$

Correction

1. *L'application p effectue une projection orthogonale selon l'axe Oz*
   mettre un dessin
2. *Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. On a :*

$$\begin{aligned} p\Big(p\Big(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\Big)\Big) &= p\Big(\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}\Big) && \textit{par définition de } p \\ &= \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} && \textit{de nouveau par définition de } p \\ &= p\Big(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\Big) \end{aligned}$$

Ainsi, appliquer deux fois p revient au même que l'appliquer une seule fois et donc $p \circ p = p$.

3. *D'une part,*

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \ker p \Leftrightarrow p\Big(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\Big) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ et } y = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix}$$

Ainsi, $\ker p = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix})$.

Or, les éléments de $\operatorname{Im} p$ *sont des vecteurs dont la troisième coordonnée est nulle. Le seul élément de* $\ker p$ *correspondant est* $\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, *donc on a bien* $\ker p \cap \operatorname{Im} p = \{0\}$.

4. *Soit* $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. *On a*

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix}0\\0\\z\end{pmatrix}}_{\in \ker p} + \underbrace{\begin{pmatrix}x\\y\\0\end{pmatrix}}_{\in \operatorname{Im} p}$$

D'après cette décomposition, on a donc l'inclusion suivante :

$$\mathbb{R}^3 \subset \ker p + \operatorname{Im} p$$

c'est-à-dire que l'on peut noter, puisqu'on sait que la somme est directe,

$$\mathbb{R}^3 \subset \ker p \oplus \operatorname{Im} p$$

Réciproquement, puisque $\ker p$ *et* $\operatorname{Im} p$ *sont des deux espaces vectoriels de* $\mathbb{R}^3$, *on a immédiatement*

$$\ker p + \operatorname{Im} p \subset \mathbb{R}^3$$

Là aussi on remplace le symbole "+" par le symbole "⊕" simplement par définition car on sait d'après la question 3 que la somme est directe.
Ainsi par double inclusion :

$$\mathbb{R}^3 = \ker p \oplus \operatorname{Im} p$$

5. *Imaginons qu'il y ait deux décompositions différentes :*

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \underbrace{v_1}_{\in \ker p} + \underbrace{v_2}_{\in \operatorname{Im} p}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \underbrace{v_1'}_{\in \ker p} + \underbrace{v_2'}_{\in \operatorname{Im} p}$$

Alors on aurait $v_1 + v_2 = v_1' + v_2'$, *et donc*

$$v_1 - v_1' = v_2' - v_2$$

Alors on aurait $v_1 - v_1' \in \ker(p)$ par stabilité par combinaison linéaire, mais aussi $v_1 - v_1' \in \mathrm{Im}(p)$ puisque $v_2' - v_2 \in \mathrm{Im}(p)$ (aussi par stabilité). On aurait donc $v_1 - v_1' \in \ker(p) \cap \mathrm{Im}(p)$, et par un raisonnement analogue $v_2' - v_2 \in \ker(p) \cap \mathrm{Im}(p)$.

Si les deux décompositions sont effectivement différente, alors nécessairement $v_1 \neq v_1'$ ou $v_2 \neq v_2'$, et on aurait donc bien un vecteur non nul dans l'intersection $\ker(p) \cap \mathrm{Im}(p)$ ($v_1 - v_1'$ ou $v_2' - v_2$).

Ce qui serait contradictoire avec le résultat de la question 3. Donc il n'y a en fait qu'une seule décomposition possible.

Les 5 exercices suivants ne sont pas prioritaires mais permettent de travailler le formalisme et l'abstraction sur les familles libres et/ou génératrices. Ils vont ensemble et sont à aborder dans l'ordre. Le résultat qui en découlera, appelé *lemme de Steinitz*, sera donné en bilan et souvent utilisé. Il est plus facile à comprendre qu'à démontrer.

Dans les 5 exercices suivants, on se place dans un espace vectoriel E et on considère dans cet espace une famille génératrice $\{w_1, w_2, \dots, w_n\}$ possédant n vecteurs, et une famille libre $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ possédant k vecteurs.

Exercice 56 ().

1. Expliquer pourquoi on peut écrire $v_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i w_i$ avec au moins un des coefficients x_i non nul.
2. Une expression qui apparaît parfois dans les preuves mathématiques est "sans perte de généralité". Expliquer pourquoi "sans perte de généralité", on peut supposer que $x_1 \neq 0$. *(indication : l'ordre des vecteurs w_i a-t-il une importance ?)*
3. En déduire que $\{v_1, w_2, ..., w_n\}$ est génératrice de E.

Exercice 57 ().

1. Expliquer pourquoi on peut écrire $v_2 = y_1 v_1 + \sum_{i=2}^{n} y_i w_i$ avec les coefficients $y_2, y_3, \dots, y_n$ ne pouvant pas tous êtres nuls

   Expliquer pourquoi sans perte de généralité, on peut supposer que $y_2 \neq 0$.
2. En déduire que $\{v_1, v_2, w_3 ..., w_n\}$ est génératrice de E.

Exercice 58 ().

Démontrer que si $k_0 < n$ et si $\{v_1, v_2, \dots, v_{k_0}, w_{k_0+1}, ..., w_n\}$ est génératrice de E, alors la famille $\{v_1, v_2, \dots, v_{k_0}, v_{k_0+1}, w_{k_0+2}, ..., w_n\}$ est aussi génératrice de E.

Exercice 59 ().

Si $k > n$, on peut continuer le processus ci-dessus jusqu'à remplacer tous les w_i. Quelle famille génératrice de E obtient-on alors ? En quoi cela mène t-il à une contradiction *(considérer une éventuelle expression de v_{n+1} selon cette famille génératrice)*.

Exercice 60 ().

Résumer le résultat des quatre exercices précédents en complétant la phrase suivante : dans un espace vectoriel E, le nombre de vecteurs d'une famille ...... est forcément ...... au nombre de vecteur d'une famille ......