Planche 5

Être ou ne pas être : libre, génératrice, injective, de bonne composition,...

Exercice 46 ().

1. Déterminer si $X \in \text{Vect}(X-1, X^2+X+1)$ en précisant s'il existe une seule, plusieurs ou aucun manière d'exprimer X comme une combinaison linéaire de ces deux polynômes.
2. Déterminer si $X \in \text{Vect}(X-1, X+1, X^2+X+1)$ en précisant s'il existe une seule, plusieurs ou aucun manière d'exprimer X comme une combinaison linéaire de ces trois polynômes.
3. Déterminer si $X \in \text{Vect}(1, X-1, X+1, X^2+X+1)$ en précisant s'il existe une seule, plusieurs ou aucun manière d'exprimer X comme une combinaison linéaire de ces quatre polynômes.

Exercice 47 ().
Démontrer que les applications linéaires définies ci-dessous sont injectives *(on ne demande pas de montrer que ces applications sont bien linéaires, mais c'est un bon exercice)* :

1. L'application linéaire
$$\begin{array}{cccc} f & : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & & \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \\ y \end{pmatrix} \end{array}$$
2. Soit $n \geq 1$ un entier. On pose $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice inversible et on considère l'application linéaire φ_M définie pour tout $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par :
$$\varphi_M(P) = MP$$
3. L'application linéaire
$$\begin{array}{cccc} I & : & \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) & \to & \mathcal{C}^0(\mathbb{R},\mathbb{R}) \\ & & f & \mapsto & F \end{array}$$
où F est définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$
4. L'application linéaire
$$\begin{array}{cccc} \Delta & : & \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ & & P(X) & \mapsto & P(X+1)+P(X) \end{array}$$
(indication : on pourra s'intéresse au degré de $\Delta\big(P(X)\big)$)

Exercice 48 ().
Soient v_1, v_2, v_3 les trois vecteurs suivants :
$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On pose $E = \text{Vect}\big(v_1, v_2, v_3\big)$.
Démontrer que :

1. $E = \text{Vect}\big(v_1 + v_2, 2v_2 + v_3, v_3 - 2v_1 - v_2\big)$.
2. $E \neq \text{Vect}\big(v_1 + v_2, v_1 + v_3, v_3 - v_2\big)$.

Conjecturer alors le plus précisément possible une propriété permettant de transformer une famille génératrice d'un espace vectoriel en une autre famille génératrice de cet espace.

Exercice 49 ().
Soit E un espace vectoriel et soit $f : E \to E$ un endomorphisme.
On rappelle qu'on peut alors définir pour tout entier $n \geq 1$ l'endomorphisme f^n définit par :

$$\text{pour tout } x \in E,\ f^n(x) = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}(x) = \underbrace{f\big(f(\ldots f(x))\big)}_{f \text{ appliqué } n \text{ fois}}$$

On suppose dans cet exercice qu'il existe un entier $N \geq 1$, tel que $f^N = 0$

1. Démontrer que la seule valeur propre possible pour f est 0.
2. Effectuer un raisonnement analogue permettant de démontrer que si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie $A^N = 0$, alors la seule valeur propre possible pour A est 0.

Exercice 50 ().
Soient E et F deux espaces vectoriels, et $u : E \to F$ une application linéaire. Soit $n \geq 1$ un entier, on considère une famille $(e_1, \ldots, e_n)$ de vecteurs de E.

1. Démontrer que si $(e_1, \ldots, e_n)$ est liée alors $\big(u(e_1), \ldots, u(e_n)\big)$ est liée.
2. Démontrer que si $(e_1, \ldots, e_n)$ est libre et si u est injective, alors $\big(u(e_1), \ldots, u(e_n)\big)$ est libre.

Exercice 51 ().
Soit E un espace vectoriel et soit $f : E \to E$ un endomorphisme.
On rappelle qu'on peut alors définir pour tout entier $n \geq 1$ l'endomorphisme f^n définit par :

$$\text{pour tout } x \in E,\ f^n(x) = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}(x) = \underbrace{f\big(f(\ldots f(x))\big)}_{f \text{ appliqué } n \text{ fois}}$$

On suppose dans cet exercice qu'il existe un entier $N \geq 1$, tel que $f^N = 0$ mais tel que $f^{N-1} \neq 0$ (f est alors dit *nilpotent* d'indice N).

1. Que désigne ce "0" dans les relations ci-dessus ?
2. Que vaut, pour tout $x \in E$, $f^N(x)$?
3. Parmi les deux reformulations ci-dessous, laquelle traduit l'hypothèse $f^{N-1} \neq 0$? Expliquer.
   (a) Pour tout $x \in E$, $f^{N-1}(x) \neq 0$
   (b) Il existe $x \in E$ vérifiant $f^{N-1}(x) \neq 0$
4. Soit $v \in E$ vérifiant $f^{N-1}(v) \neq 0$. Démontrer que la famille $\big(v, f(v), f^2(v), \ldots, f^{N-1}\big)$ est libre.

Exercice 52 ().
Soit G un espace vectoriel. Soient $p \geq 1$ et $n \geq 1$ deux entiers. Soit E et F deux sous-espaces vectoriels de G ayant respectivement pour famille génératrice $(e_1, \ldots, e_p)$ et $(f_1, \ldots, f_n)$.

Démontrer que $(e_1, \dots, e_p, f_1, \dots, f_n)$ est une famille génératrice de $E + F$.

Exercice 53 ().
Dans cet exercice, on considère deux endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ définis de la manière suivante :

- f_θ représente la rotation d'angle θ autour de l'origine $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
- s_x représente la symétrie par rapport à l'axe des abscisses

En raisonnant graphiquement :

1. Déterminer une valeur de θ tel que $f_\theta \circ s_x \neq s_x \circ \theta$
2. Déterminer une valeur de θ tel que $f_\theta \circ s_x = s_x \circ \theta$

Exercice 54 ().
On pose $t \in \mathbb{R}$ et on considère la famille de vecteurs suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le but est de déterminer pour quelle(s) valeur(s) de t cette famille est libre.

1. Expliquer pourquoi cela revient à se demander pour quelle valeur de t la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ t & t & 1 \end{pmatrix}$ est injective.
2. En déduire que cela revient à se demander pour quelle valeur de t la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 0 & 1 & 0 \\ t & t & 1 \end{pmatrix}$ est inversible *(vous pouvez par exemple utiliser le théorème du rang matriciel)*
3. Conclure à l'aide du calcul du déterminant de cette matrice.

Exercice 55 ().
On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ qui transforme tout point (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ en $(x, y, 0)$. On note p cet endomorphisme.

1. Faire un dessin illustrant ce que fait l'application p.
2. Démontrer que $p \circ p = p$.
3. Démontrer que $\ker p \cap \operatorname{Im} p = \{0\}$. On dit alors que ces deux espaces sont *en somme directe* et on notera leur somme $\ker p \oplus \operatorname{Im} p$ au lieu de $\ker p + \operatorname{Im} p$.
4. Décomposer $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ comme la somme d'un vecteur de $\ker p$ et d'un vecteur de $\operatorname{Im} p$, à déterminer tous les deux. En déduire que
$$\mathbb{R}^3 = \ker p \oplus \operatorname{Im} p$$
5. Démontrer que si quelqu'un trouvait une décomposition différente de la votre cela contredirait le fait que $\ker p \cap \operatorname{Im} p = \{0\}$

Les 5 exercices suivants ne sont pas prioritaires mais permettent de travailler le formalisme et l'abstraction sur les familles libres et/ou génératrices. Ils vont ensemble et sont à aborder dans l'ordre. Le résultat qui en découlera, appelé *lemme de Steinitz*, sera donné en bilan et souvent utilisé. Il est plus facile à comprendre qu'à démontrer.
Dans les 5 exercices suivants, on se place dans un espace vectoriel E et on considère dans cet espace une famille génératrice $\{w_1, w_2, \ldots, w_n\}$ possédant n vecteurs, et une famille libre $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ possédant k vecteurs.

Exercice 56 ().

1. Expliquer pourquoi on peut écrire $v_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i w_i$ avec au moins un des coefficients x_i non nul.
2. Une expression qui apparaît parfois dans les preuves mathématiques est "sans perte de généralité". Expliquer pourquoi "sans perte de généralité", on peut supposer que $x_1 \neq 0$. *(indication : l'ordre des vecteurs w_i a-t-il une importance ?)*
3. En déduire que $\{v_1, w_2, ..., w_n\}$ est génératrice de E.

Exercice 57 ().

1. Expliquer pourquoi on peut écrire $v_2 = y_1 v_1 + \sum_{i=2}^{n} y_i w_i$ avec les coefficients $y_2, y_3, \ldots, y_n$ ne pouvant pas tous êtres nuls
   Expliquer pourquoi sans perte de généralité, on peut supposer que $y_2 \neq 0$.
2. En déduire que $\{v_1, v_2, w_3 ..., w_n\}$ est génératrice de E.

Exercice 58 ().
Démontrer que si $k_0 < n$ et si $\{v_1, v_2, \ldots, v_{k_0}, w_{k_0+1}, ..., w_n\}$ est génératrice de E, alors la famille $\{v_1, v_2, \ldots, v_{k_0}, v_{k_0+1}, w_{k_0+2}, ..., w_n\}$ est aussi génératrice de E.

Exercice 59 ().
Si $k > n$, on peut continuer le processus ci-dessus jusqu'à remplacer tous les w_i. Quelle famille génératrice de E obtient-on alors ? En quoi cela mène t-il à une contradiction *(considérer une éventuelle expression de v_{n+1} selon cette famille génératrice)*.

Exercice 60 ().
Résumer le résultat des quatre exercices précédents en complétant la phrase suivante : dans un espace vectoriel E, le nombre de vecteurs d'une famille ...... est forcément ...... au nombre de vecteur d'une famille ......