Bilan Feuille 5

Lemme de Steinitz et conséquences :

Dans un espace vectoriel E, une famille libre a forcément moins (au sens "inférieur ou égal) de vecteurs qu'une famille génératrice de E.

<u>Conséquence</u> : Toutes les familles libre <u>et</u> génératrice ont le même nombre de vecteurs

définition d'une <u>base</u>

dimension : nombre de vecteurs d'une base

Sommes d'espaces vectoriels :

* Somme directe : $E \oplus F$

→ signifie que $E \cap F = \{0\}$

Propriété : E et F sont en somme directe si et seulement si :

* $e_1 + f_1 \neq e_2 + f_2$ si $(e_1, f_1) \neq (e_2, f_2)$

(il ne peut pas y avoir 2 décompositions différentes d'un même vecteur).

utilisée en pratique pour démontrer qu'une somme est directe.

* Posons $e \in E$, $f \in F$.

Si $e + f = 0$, alors $e = 0$ et $f = 0$

* si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est génératrice de E
et si $\{f_1, \ldots, f_p\}$ est génératrice de F,
alors $\{e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_p\}$ est génératrice de $E+F$

Familles de vecteurs :

* Modifier une famille génératrice :

si $\{v_1, \ldots, v_n\}$ est génératrice, les opérations suivantes conservent le caractère générateur :

① $v_i \leftarrow \alpha v_i + \lambda v_j$ avec $\alpha \neq 0$

② $v_i \leftrightarrow v_j$ $\qquad v_1 \leftarrow \frac{v_1 + v_2}{2}$

exemple : $\text{Vect}(X+1, X-1) = \text{Vect}(X, X-1)$
$= \text{Vect}(X, 1)$

$= \mathrm{vect}(1, X)$.

$v_2 \leftarrow v_1 - v_2$

* Si deux espaces ont la même famille génératrice (donc par exemple la même base), ils sont égaux.

* Dans $\mathbb{R}^3$, une famille de 3 vecteurs est libre ssi le déterminant de la matrice formée par ses 3 colonnes est non nulle.