Planche 4

Une histoire de familles (suite)

Exercice 35 ().
Soit E un espace vectoriel et $f : E \to E$ une application linéaire. On dit que $\lambda \in \mathbb{R}$ est une *valeur propre* de f s'il existe $x \in E$ avec $x \neq 0$ tel que $f(x) = \lambda x$. Un tel x est alors appelé *vecteur propre* associé à la valeur propre λ.
On note alors

$$E_\lambda = \left\{x \in E \mid f(x) = \lambda x\right\}$$

l'ensemble des vecteurs propres associés à la valeur propre λ.

1. Dans la définition de valeur propre, que se passerait-il si on enlevait la condition $x \neq 0$?
2. E_λ est-il un espace vectoriel ?
3. Si f est une transformation de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}^2$ (ou $\mathbb{R}^3$ vers $\mathbb{R}^3$), donner une interprétation géométrique de la notion de vecteur propre.

Exercice 36 ().
On pose l'ensemble de polynômes suivants $H = \{a_2X^2 - a_1X \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$.

1. Déterminer deux polynômes $P_1(X)$ et $P_2(X)$ tels que $H = \mathrm{Vect}(P_1, P_2)$ et en déduire que H est un espace vectoriel.
2. La famille $(X^2 - X, X)$ est-elle génératrice de H ?
3. La famille $(1, 1 - X, 1 + X^2)$ est-elle génératrice de H ?
4. Décrivez du mieux possible l'espace vectoriel suivant :

$$\mathrm{Vect}(1 - X^2, 1 + X^2)$$

Exercice 37 ().
Démontrer que le noyau d'une application linéaire est un espace vectoriel.

Exercice 38 ().
Soit E un espace vectoriel et soient $(e_1, \ldots, e_p)$ et $(f_1, \ldots, f_n)$ deux familles de vecteurs de E, avec $p \geq 1$ et $n \geq 1$ des entiers.
Démontrer que :

$$\mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_p) \subset \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_n) \quad \Longleftrightarrow \quad e_1, \ldots, e_p \in \mathrm{Vect}(f_1, \ldots, f_n)$$

Exercice 39 ().
En cryptographie, un chiffrement d'un message en un message codé peut dans certains cas être représenté par une application linéaire $c : E \to F$, E représentant alors l'espace vectoriel des messages non chiffrés et F l'espace vectoriel contenant les messages chiffrés. *(On passera pour l'instant sous silence ce que sont précisément E et F)*

1. Pour que le déchiffrement puisse se faire, il ne faut pas que deux messages initialement différents donnent la même version chiffrée, sinon on ne saurait pas quel est le message initial. Parmi les formulations suivantes, énoncées pour toute paire de messages $(m_1, m_2) \in E \times E$, laquelle ou lesquelles traduisent mathématiquement cette contrainte ?

(a) Si $m_1 \neq m_2$ alors $c(m_1) \neq c(m_2)$

(b) Si $m_1 = m_2$ alors $c(m_1) = c(m_2)$

(c) Si $c(m_1) \neq c(m_2)$ alors $m_1 \neq m_2$

(d) Si $c(m_1) = c(m_2)$ alors $m_1 = m_2$

2. Lorsque cette contrainte est vérifiée, c est une application linéaire dite *injective*. Démontrer que c est injective si et seulement si $\ker c = \{0\}$.

Exercice 40 ().
Soit E un espace vectoriel. Soit v une application linéaire de E vers E.
Montrer que si $x \in \ker(v \circ v) \setminus \ker v$, alors $(x, v(x))$ est une famille libre.
(Rappel : La notation \ signifie "privé de", c'est-à-dire que $x \in \ker v \circ v$ mais $x \notin \ker v$)

Exercice 41 ().
Dans chacun des cas suivants, déterminer si la famille donnée est libre ou liée et reformuler si possible cette question en rapport avec le noyau d'une certaine matrice.

1. La famille $(X^2 + 1, X^2 + X, X^2 + X + 1)$.
2. La famille $\big(1, X - 1, (X - 1)^2\big)$.
3. La famille $\big(X - 1, X^2 + 1, X(X + 1)\big)$.
4. La famille formée par les vecteurs

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

5. La famille formée par les vecteurs

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 42 ().
On considère un espace vectoriel E et une application linéaire $f : E \to E$. On rappelle que id_E désigne l'application identité de E vers E, qui ne modifie pas les vecteurs de E ($\mathrm{id}_E(x) = x$). On rappelle aussi que si $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $f - \lambda \mathrm{id}_E$ l'application linéaire définie par :

$$(f - \lambda \mathrm{id}_E)(x) = f(x) - \lambda x$$

On pose $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ et $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ deux nombres réels différents.
Démontrer que si $x_1 \in \ker(f - \lambda_1 \mathrm{id}_E)$ et si $x_2 \in \ker(f - \lambda_2 \mathrm{id}_E)$, alors (x_1, x_2) est une famille libre.

Exercice 43 ().
Un *endomorphisme* est une application linéaire qui va d'un espace vectoriel vers lui-même. Autrement dit, f est un endomorphisme d'un espace vectoriel E si $f : E \to E$ est une application linéaire.
Lorsque c'est le cas, on définit alors pour tout entier $n \geq 1$ l'application f^n définit par :

$$\text{pour tout } x \in E,\ f^n(x) = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}(x) = \underbrace{f\big(f(\ldots f(x))\big)}_{f \text{ appliqué } n \text{ fois}}$$

1. Expliquer pourquoi on ne peut en général par définir f^n si f n'est pas un endomorphisme.

2. Si f est la rotation de centre $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et d'angle θ dans $\mathbb{R}^2$, que représente f^2 ? f^3 ? f^n pour un entier quelconque $n \geq 1$?
3. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E quelconque.
   (a) Démontrer que
   $$\ker f^n \subset \ker f^{n+1}$$
   (b) Démontrer que
   $$\operatorname{Im} f^n \supset \operatorname{Im} f^{n+1}$$

Exercice 44 ().
Soit E un espace vectoriel, soient $n \geq 1$ un entier et $(e_1, \ldots, e_n)$ une famille génératrice de E.
Soit $u : E \to F$ une application linéaire.
Montrer que $\big(u(e_1), \ldots u(e_n)\big)$ est une famille génératrice de $\operatorname{Im} u$. Est-ce également une famille génératrice de F ? (Si oui, le démontrer, si non donner un contre-exemple)

Exercice 45 ().
Un signal radio peut être affecté par des interférences, ou bien de manière général contenir deux signaux (ou plus) de sources différentes que l'on souhaite séparer (enlever le bruit de fond, isoler différentes voix dans une conversation...).
Dans cet exercice, on modélise le signal total reçu par un vecteur s_{total} et on suppose qu'il est la somme de deux vecteurs s_1 et s_2 représentant deux signaux de sources différentes (source 1 et source 2) à séparer :
$$s_{\text{total}} = s_1 + s_2$$
On note E_1 l'espace vectoriel des signaux possibles provenant de la source 1 et E_2 l'espace vectoriel des signaux possibles provenant de la source 2.

Concrètement, on dispose seulement du signal total s_{total}.

1. Montrer que s'il existe un signal $s \neq 0$ pouvant provenir de E_1 comme de E_2, alors on ne peut pas espérer déterminer s_1 et s_2 (et donc on ne peut pas séparer les signaux).
2. Au contraire, montrer que si le seul signal commun à E_1 et E_2 est le signal nul, alors il n'y aura qu'une possibilité pour s_1 et s_2.