Exercice 35 :

1) Si f est linéaire, on a toujours $f(0)=0$

Donc $f(0) = \lambda \times 0$

Donc si on enlève la condition $x \neq 0$, n'importe quel λ serait valeur propre.

2) • $E_\lambda \subset E$

• $E_\lambda \neq \emptyset$ car $0 \in E_\lambda$ car $f(0) = \lambda \times 0$

$\to f(x) = \lambda x$ $\quad f(y) = \lambda y$

• Posons $x \in E_\lambda$, $y \in E_\lambda$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Montrons que $\alpha x + y \in E_\lambda$

i.e. que $f(\alpha x + y) = \lambda(\alpha x + y)$

Or $f(\alpha x + y) = \alpha f(x) + f(y)$ car f est linéaire

$= \alpha \lambda x + \lambda y$ car $x, y \in E_\lambda$

$= \lambda(\alpha x + y)$

Donc E_λ est stable par combinaisons linéaires.

Donc E_λ est un SEV de E.

Exercice 36 :

$$H = \{ a_2 X^2 - a_1 X \mid a_1, a_2 \in \mathbb{R} \}$$

1) $\underbrace{H = \mathrm{Vect}(X^2, -X)}$

$(X^2, -X)$ est génératrice de H.

2) Montrons que $H = \mathrm{Vect}(X^2 - X, X)$.

$\boxed{\subset}$: Posons $P(X) = a_2 X^2 - a_1 X \in H$

on cherche $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$P(X) = \alpha_1 (X^2 - X) + \alpha_2 X$$

$$\begin{cases} \alpha_1 = a_2 \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = -a_1 \end{cases}$$

On choisit $\alpha_1 = a_2$

et $\alpha_2 = -a_1 + a_2$.

Ainsi $\underline{H \subset \mathrm{Vect}(X^2 - X, X)}$.

$\boxed{\supset}$

$X^2 - X \in H$ $(a_2 = 1, a_1 = 1)$

$X \in H$ $(a_2 = 0, a_1 = -1)$.

Donc puisque H est stable par combinaisons linéaires, $\underline{\mathrm{Vect}(X^2 - X, X) \subset H}$

Donc par double inclusion, $H = \text{Vect}(X^2 - X, X)$

3) $X \in \text{Vect}(1, 1-X, 1+X^2)$

car $X = 1 - (1-X)$.

$X^2 \in \text{Vect}(1, 1-X, 1+X^2)$

car $X^2 = 1 + X^2 - 1$

Par stabilité par combinaison linéaire,

$a_2 X^2 - a_1 X \in \text{Vect}(1, 1-X, 1+X^2)$

Donc $H \subset \text{Vect}(1, 1-X, 1+X^2)$

Mais $1 \notin H$ donc $\text{Vect}(1, 1-X, 1+X^2) \not\subset H$.

4) $\mathrm{Vect}(\underbrace{1 - X^2}_{(1-X)(1+X)}, 1 + X^2) = \{ a(1-X^2) + b(1+X^2) \mid a, b \in \mathbb{R} \}$

$= \{ (b-a)X^2 + (a+b)\times 1 \mid a, b \in \mathbb{R} \}$

$\overset{?}{=} \mathrm{Vect}(1, X^2)$

$= \{ cX^2 + d \mid c, d \in \mathbb{R} \}$

Pour tous $c, d \in \mathbb{R}$, peut-on trouver $a, b \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} b - a = c \\ b + a = d \end{cases}$$

$$\overset{L_1 - L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} -2a = c - d \\ b + a = d \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{d-c}{2} \\ b = d - a = d - \dfrac{d-c}{2} \end{cases}$$

Donc on a bien $\mathrm{Vect}(1 + X^2, 1 - X^2) = \mathrm{Vect}(1, X^2)$

Ex 38 :

$\Leftarrow$) On suppose que $e_1, \dots e_p \in \text{Vect}(f_1, \dots, f_n)$.

Alors par stabilité par combinaison linéaire (car $\text{Vect}(f_1, \dots, f_n)$ est un EV) alors toute combinaison linéaire de $e_1, \dots, e_p$ est aussi dans $\text{Vect}(f_1, \dots, f_n)$.

Donc $\underline{\text{Vect}(e_1, \dots, e_p) \subset \text{Vect}(f_1, \dots, f_n)}$.

$\Rightarrow$ On suppose que $\text{Vect}(e_1, \dots, e_p) \subset \text{Vect}(f_1, \dots, f_n)$

Mq $e_1, \dots, e_p \in \text{Vect}(f_1, \dots, f_n)$.

Or, $\begin{cases} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_p \end{cases} \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$

Et vue l'inclusion on a donc automatiquement

$\begin{cases} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ \vdots \\ e_p \end{cases} \in \text{Vect}(f_1, \dots, f_n)$