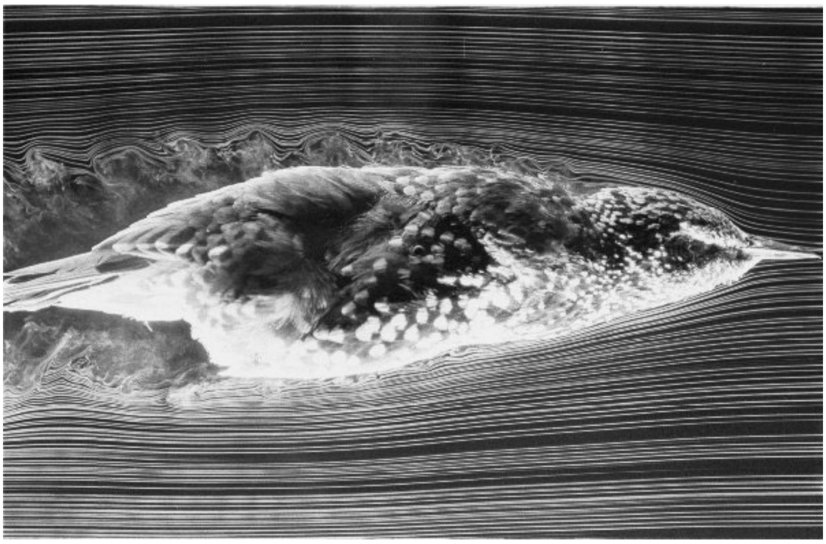
Mécanique des Fluides

Exercices de TD

2024-2025



Catherine Even

catherine.even@universite-paris-saclay.fr

Table des matières

TD0 : Opérateurs vectoriels

1. Gradient

Le gradient est un opérateur qui s'applique à un **champ de scalaires** f(x,y,z) et décrit un **champ de vecteurs** $\vec{\nabla} f(x,y,z)$ qui représente la variation de la valeur du champ scalaire dans l'espace. Pratiquement, le gradient indique la direction de la plus grande variation du champ scalaire, et l'intensité de cette variation.

$\vec{\nabla} f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_z$ en coordonnées cartésiennes (x,y,z)

Imaginons un sol chauffé par le soleil en été (du bitume par exemple). Dessiner le gradient de température au-dessus du sol en un point donné.

2. Divergence

L'opérateur divergence est un opérateur différentiel qui associe à un champ de vecteurs $\vec{A}(x,y,z)$ une quantité scalaire $div\vec{A}(x,y,z)$ qui caractérise localement la façon avec laquelle les lignes de champ divergent.

Plus les lignes de champ divergent (s'écartent vite) plus $div\vec{A}(x,y,z)$ est élevée.

$$div\vec{A}(x,y,z) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

3. Rotationnel

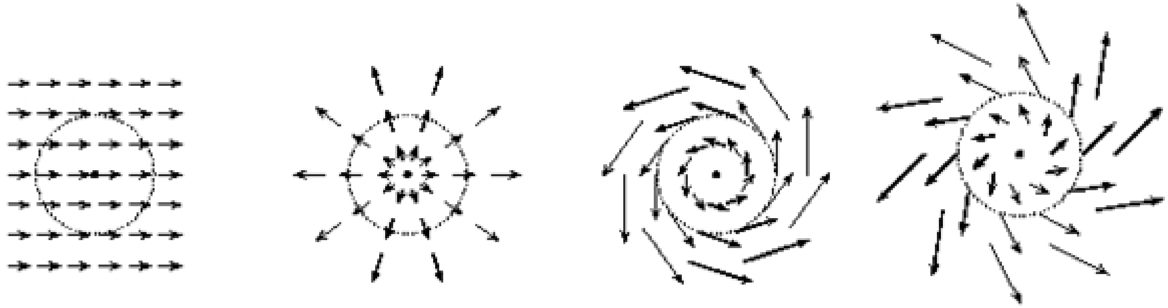
L'opérateur rotationnel est un opérateur différentiel qui mesure la propension du champ de vecteurs $\vec{A}(x,y,z)$ à tourner. C'est un opérateur vectoriel.

Le vecteur résultant $\overrightarrow{rot}\vec{A}$ est porté par l'axe autour duquel s'opère la rotation.

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{u}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{u}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{u}_z$$

4. Exemples pour la divergence et le rotationnel

Donner le signe de $div\vec{A}$ et dessiner $\overrightarrow{rot}\vec{A}$ au point central dans les 4 cas ci-dessous :



a **b** **c** **d**

5. <u>*Laplacien*</u>

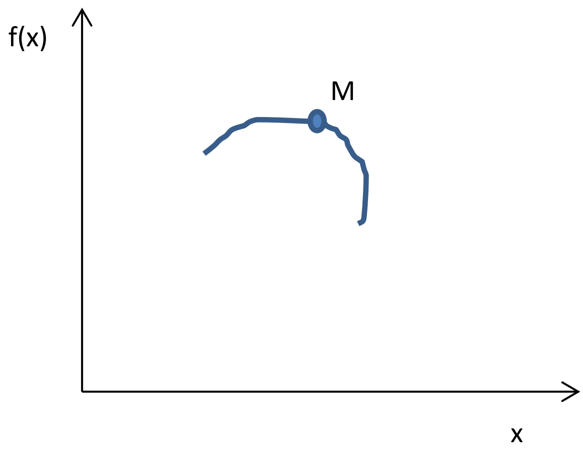
Il s'applique soit à une fonction scalaire *f(x,y,z)* soit à un champ de vecteurs $\vec{A}(x,y,z)$.

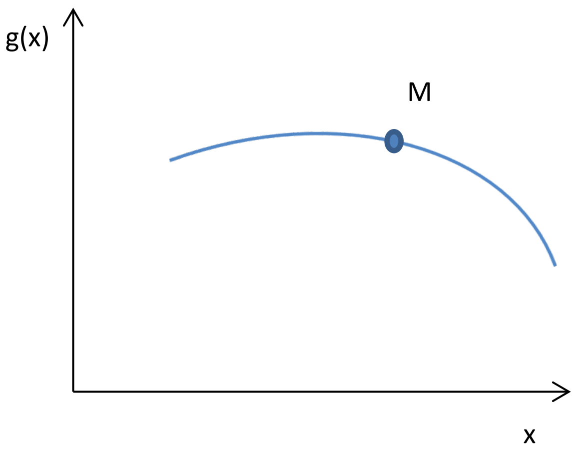
Le laplacien d'une fonction *f(x,y,z)* peut être interprété comme la courbure moyenne locale de la fonction, que l'on visualise aisément pour une fonction *f* à une seule variable.

$$\Delta f(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\Delta\vec{A} = \Delta A_x(x,y,z)\vec{u}_x + \Delta A_y(x,y,z)\vec{u}_y + \Delta A_z(x,y,z)\vec{u}_z$$

Exemple pour une fonction à une variable :





Dans quel cas le laplacien au point M est-il le plus grand (en valeur absolue) ? Quel est son signe?

TD1 : Pression – Hydrostatique – Archimède

Exercice 1. Relation fondamentale de la statique des fluides

Ecrire l'équation de Navier-Stokes dans le cas statique. En déduire par intégration la relation $P + \rho gz = cste$, où l'axe des z est orienté vers le haut. Quelle hypothèse doit-on faire pour obtenir cette relation ?

Exercice 2. Cas d'un liquide ou d'un gaz

1) Appliquer la relation fondamentale de la statique des fluides dans un liquide au contact de l'atmosphère (l'eau dans une piscine, ou dans la mer par exemple). Comment varie la pression lorsqu'on va vers le bas ? A quelle profondeur la pression a-t-elle augmenté de 10% par rapport à la pression atmosphérique ? A quelle profondeur a-t-elle doublé par rapport à la pression atmosphérique ?
2) Appliquer la relation fondamentale de la statique des fluides dans l'atmosphère, entre le niveau de la mer et une altitude z donnée. Comment varie la pression lorsqu'on va vers le haut ? A quelle altitude la pression a-t-elle baissé de 10% par rapport à la pression au niveau de la mer ? Dans le cas d'une pièce dans un bâtiment, de combien varie la pression entre le bas et le haut de la pièce ? Conclusion ?

Exercice 3. Différence de pression artérielle entre les pieds et la tête

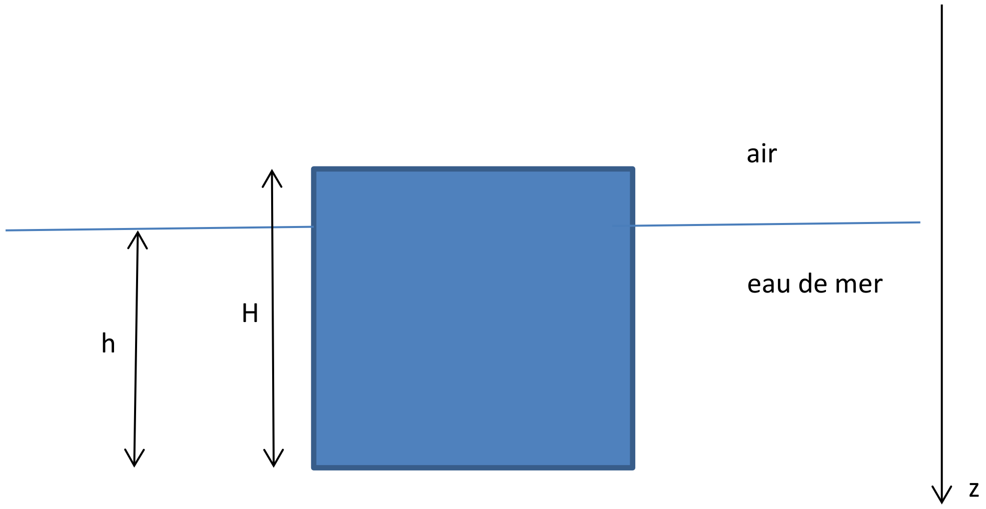
On considère un individu de 1.80m. Le cerveau est à 36 cm du cœur, où la pression artérielle moyenne (« tension ») est supposée égale à 10 cm Hg (1 Pa = 7.5 10^{-4} cm Hg). Calculer la pression en cm Hg au niveau de la tête et des pieds.

Exercice 4. Presse hydraulique

Une presse hydraulique est constituée de deux surfaces, une de 0.01 m^2 et une autre de 10 m^2 amovibles connectées par un fluide incompressible.

a) On met une masse de 10 kg sur la surface de 0.01 m^2. Quelle masse doit-on mettre sur la surface de 10 m^2 pour que les deux soient à la même hauteur ?
b) Pour soulever un camion de 2 tonnes de 50 cm par rapport à la petite surface, quelle est la masse que l'on doit mettre sur la petite surface?

<u>Exercice 5. Forces de pression exercées sur un iceberg</u> (contrôles janvier 2023 et janvier 2024))



On considère un iceberg cubique de côté H, partiellement immergé. On appelle h la hauteur immergée. On note ρ_g la masse volumique de l'iceberg, et ρ_e celle de l'eau salée. La pression atmosphérique est notée P_0.

1) Calculer la force de pression exercée sur la surface horizontale en haut du glaçon, notée F_{haut} (en norme), et la force de pression exercée sur la surface horizontale en bas du glaçon, notée F_{bas} (en norme). Les représenter sur un schéma. En déduire $\Delta F = F_{bas} - F_{haut}$. Dans quel sens est-elle dirigée ? Pourquoi cette force peut-elle être considérée comme la résultante totale des forces de pression s'exerçant sur l'iceberg ?
2) Retrouver l'expression de ΔF à l'aide d'un théorème vu en cours (nommer ce théorème).
3) En écrivant que l'iceberg est en équilibre, trouver l'expression de h en fonction de H et des paramètres pertinents. A quelle condition a-t-on $h < H$?
4) Application numérique : on donne $\rho_e = 10^3$ kg.m^{-3}, $\rho_g = 900$ kg.m^{-3}, H = 100m. Calculer h et ΔF, et commenter les valeurs trouvées.

<u>Exercice 6. « Balloon clustering »</u>

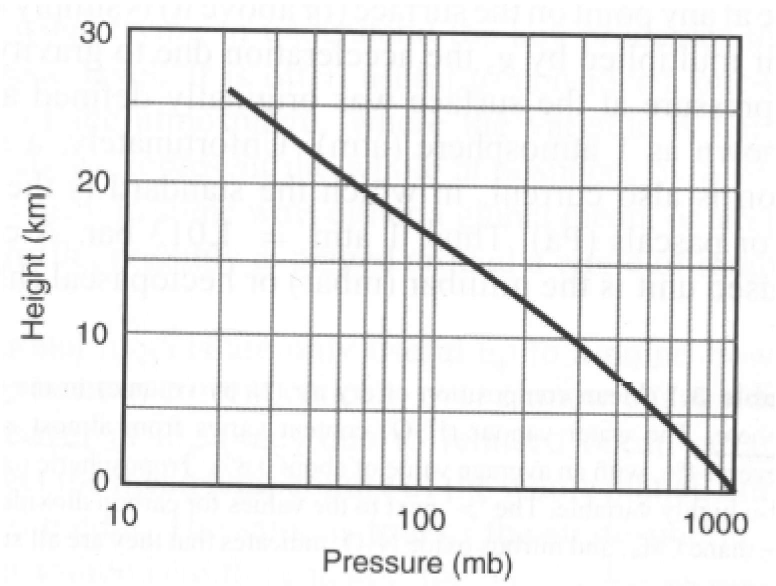
Calculer le nombre de ballons remplis d'hélium nécessaires pour soulever un homme (cf image ci-dessus). Vérifier l'ordre de grandeur obtenu grâce à la photo.

Exercice 7. Profil de pression dans une atmosphère isotherme

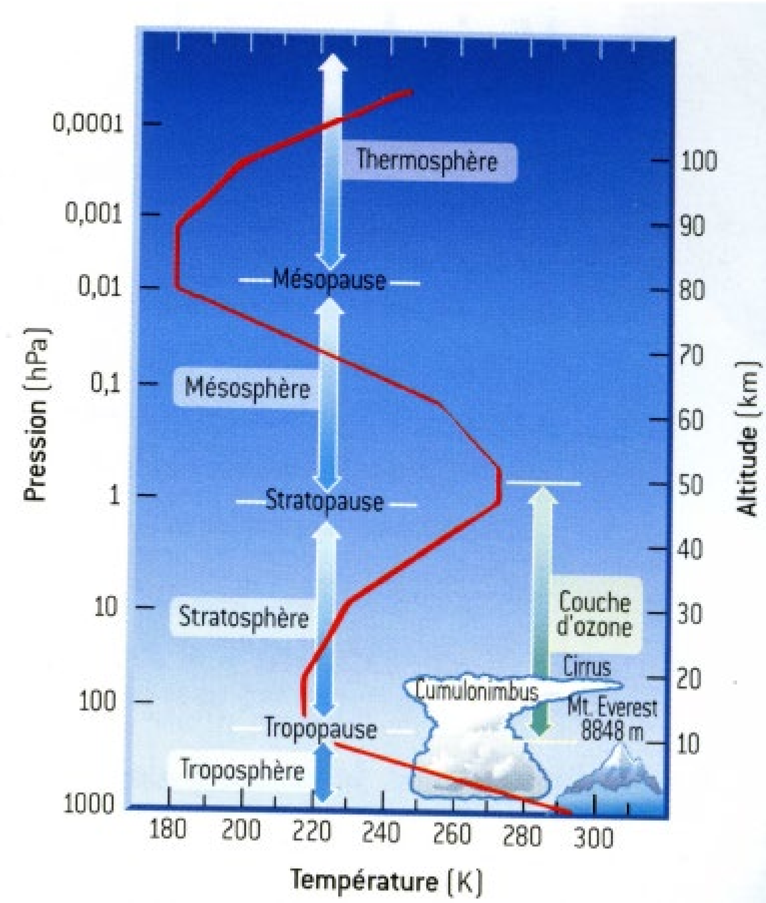
Ce modèle consiste à supposer que la température de l'air à l'échelle de l'atmosphère (troposphère : jusqu'à 10 km de hauteur environ) est indépendante de l'altitude : on la notera T_0 (on prendra T_0 = 0°C). On assimilera ici l'air à un gaz parfait. L'axe *(Oz)* est orienté vers le haut.

L'air est assimilé à un gaz parfait de masse molaire M = 29 g.mol^{-1}, régi par l'équation d'état PV = nRT.

1) Ecrire la relation fondamentale de la statique des fluides. La projeter sur l'axe z.
2) Utiliser la loi des gaz parfaits pour en déduire l'expression de ρ en fonction de P et T. Peut-on considérer que la masse volumique ρ de l'air est indépendante de z ? Déduire de l'expression de ρ une équation différentielle sur P(z).
3) Résoudre cette équation et montrer que la pression à l'altitude z est donnée par la relation $P(z) = P_0 \exp(-\frac{Mg}{RT_0})$, avec P_0 = P(z=0). Tracer l'allure de P(z).
4) Application numérique : que vaut la pression au sommet du Mont-Blanc (4807m) ?
5) Comparer la courbe expérimentale ci-dessous (Taylor, *Elementary Climate Physics*) avec le résultat du modèle précédent. Commenter.



6) Commenter l'hypothèse d'atmosphère isotherme, compte tenu de la courbe ci-dessous.



Thermosphère
Mésopause
Mésosphère
Stratopause
Stratosphère
Tropopause
Troposphère
Couche d'ozone
Cirrus
Cumulonimbus
Mt. Everest 8848 m
0,0001
0,001
0,01
0,1
1
10
100
1000
Pression (hPa)
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
Altitude (km)
180
200
220
240
260
280
300
Température (K)

TD2 : Cinématique

Exercice 1. Écoulement dans un quadrant

Le champ de vitesse pour un écoulement bidimensionnel et stationnaire est donné par :
$\vec{v} = \frac{v_0}{l}(x\vec{\imath} - y\vec{\jmath}) = v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath}$, où v_0 et l sont des constantes.

1. Représenter le champ de vitesse dans le 1er quadrant, en dessinant les flèches représentant la vitesse du fluide à des localisations bien précises.
2. Déterminer le champ d'accélération pour cet écoulement. Le représenter à l'aide de flèches.

Exercice 2. Ecoulement de Poiseuille plan

L'écoulement stationnaire d'un fluide soumis à une différence de pression et situé entre deux plans parallèles à *xOz* distants de *d* (situés respectivement en y = -d/2 et y = +d/2) est caractérisé par le champ de vitesse suivant :

$$\vec{v} = v_0\left(1 - 4\frac{y^2}{d^2}\right)\overrightarrow{u_x}$$

Les dimensions des plans sont : *a* dans la direction *z* et *d* dans la direction *y*.

1. Déterminer l'allure du champ de vitesse.
2. Cet écoulement est-il incompressible ?
3. Calculer le débit volumique à travers une section perpendiculaire à l'écoulement. En déduire la vitesse moyenne dans une section en fonction de v_0
4. Déterminer le vecteur accélération $\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v}$

Exercice 3. Ecoulement dans un tuyau avec rétrécissement

Soit un fluide en écoulement incompressible, de masse volumique ρ, s'écoulant dans un tuyau horizontal d'axe *Oz* de section circulaire, avec un rétrécissement. Le champ de vitesse est, en coordonnées cylindriques :
$\vec{v} = v_z\vec{u}_z - \alpha r\,\vec{u}_r$ où α est une constante donnée, et v_z une fonction de z.

1. L'écoulement est-il en régime stationnaire ?
2. Dessiner qualitativement l'allure du champ de vitesses/des lignes de courant.
3. En vous aidant de l'équation de continuité (équation traduisant la conservation de la masse) d'un fluide incompressible, calculer $v_z(z)$ sachant que $v_z(0) = v_0$. On donne l'expression de la divergence d'un vecteur en coordonnées cylindriques :

$$\mathrm{div}\,\vec{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial rA_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

4. Calculer le débit massique à travers l'entrée du tuyau (z = 0) de rayon R. Calculer le débit à la sortie du tuyau (z = L).
5. Calculer le champ d'accélération du fluide. On donne l'expression du gradient en coordonnées cylindriques :

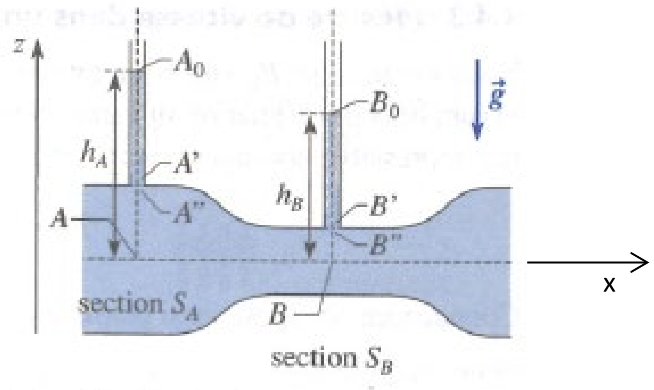
$$\overrightarrow{\text{grad}}\, V = \frac{\partial V}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{u}_z$$

TD3 : Fluides Parfaits

Exercice 1. Théorème de Bernoulli

a) Ecrire l'équation d'Euler pour un fluide parfait.
b) L'intégrer sur une ligne de courant allant d'un point A à un point B, dans le cas d'un écoulement stationnaire d'un fluide incompressible. En déduire le théorème de Bernoulli.

Exercice 2. Tube de Venturi



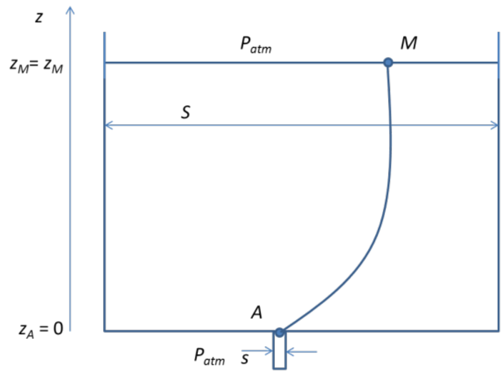
Doc. 30. *Principe du tube de Venturi.*

Les tubes de Venturi sont utilisés, par exemple dans l'industrie, pour mesurer le débit d'un fluide dans une canalisation. Le principe est donné par le schéma ci-dessus. Le fluide est supposé incompressible (ρ = cste) et l'écoulement est stationnaire.

a) Grâce à la conservation du débit volumique et à l'application de la relation de Bernoulli entre les points A et B, en déduire la différence de pression $P_A - P_B$ en fonction de la vitesse v_A au point A.
b) Montrer que pour un écoulement unidirectionnel tel que $\mathbf{v} = v(x)\,\mathbf{u_x}$, $\mathbf{rot\ v} = \mathbf{0}$. En déduire que, pour un écoulement unidirectionnel stationnaire et incompressible, le théorème de Bernoulli s'applique partout dans le fluide.
c) Exprimer P_A en fonction de h_A et P_B en fonction de h_B, et en déduire $P_A - P_B$ en fonction de $h_A - h_B$.
d) En égalisant les deux expressions de $P_A - P_B$ trouvées précédemment, en déduire les expressions de la vitesse v_A en fonction de $h_A - h_B$, ainsi que celle du débit volumique.
e) Application numérique avec les valeurs d'un TP : h_A = 35 cm ; h_B = 14.2 cm ; diamètre de la section A : D_A = 26 mm ; diamètre de la section B : D_B = 16 mm. En déduire le débit par la formule théorique. Comparer à la valeur mesurée de $5.03\ 10^{-4}\ m^3.s^{-1}$

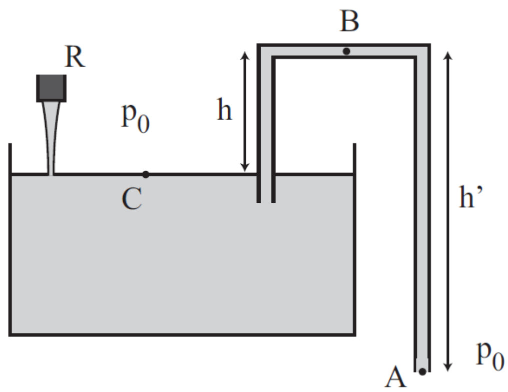
Exercice 3. Vidange d'une cuve. Formule de Torricelli

Une cuve se présente sous la forme d'un réservoir de forme parallélépipédique de 10 m de longueur, 5 m de largeur et 2 m de hauteur. Cette cuve est remplie d'un liquide qui se vide par un orifice percé dans un fond horizontal débouchant à l'air libre et dont la section vaut s = 0.5 dm^2. Quel est le temps nécessaire à la vidange totale de la cuve ?
Hypothèses : l'écoulement du liquide est incompressible et stationnaire. Ce liquide se comporte comme un fluide parfait.



Exercice 4. Siphon *(contrôles janvier 2023 et janvier 2024)*

De l'eau s'écoule par un siphon formé d'un tube en U de section constante. Le haut du tube est à une hauteur *h* au-dessus du niveau de la surface libre dans le récipient et à une hauteur *h'* de l'orifice de sortie *A*. Le niveau du liquide (*C*) dans le réservoir de large section est maintenu constant grâce à l'apport de liquide par le robinet *R*. On suppose que l'eau est un fluide parfait, et l'écoulement sera considéré comme stationnaire et incompressible.



1. Expliquer pourquoi on peut considérer que $v_C = 0$.
2. Exprimer la vitesse v_A de l'écoulement de l'eau en *A*.
3. Déduire du résultat une condition nécessaire au fonctionnement du siphon. Calculer approximativement v_A pour $h' - h$ = 1 m.
4. Calculer la pression en *B* pour h' = 1,5 m et h' = 15 m et commenter son signe.
5. A partir de quelle valeur limite de h' le siphon cessera-t-il de fonctionner ?

TD4 : Dynamique des Fluides Visqueux

<u>Exercice 1. Nombre de Reynolds</u>

Rappeler l'expression du nombre de Reynolds. L'estimer dans les cas suivants :

- Etre humain qui marche
- Etre humain qui nage
- Voiture à 130 km/h
- Chute libre de Félix Baumgartner en 2012
- Avion
- Bactérie en mouvement dans l'eau

Quels écoulements sont laminaires ? Turbulents ?

<u>Exercice 2. Ecoulement de Poiseuille dans un tuyau</u>

On considère un écoulement laminaire et stationnaire dans un cylindre de rayon R et de longueur L, d'axe Ox. La pression est notée P_1 en x = 0 et P_2 en x = L. On suppose $\Delta P = P_1 - P_2 > 0$. On négligera la gravité.

On utilisera les coordonnées cylindriques.

La vitesse du fluide s'écrit $\vec{v} = v_x(r)\vec{u}_x$

a) Montrer qu'on a $v_x(r) = U_{\max}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)$ et exprimer U_{max} en fonction de $\Delta P/L$.

   Tracer le profil de vitesses dans un plan passant par l'axe du cylindre.

b) Exprimer le débit volumique Qv et retrouver la loi de Poiseuille.

c) Application numérique : on considère un tuyau d'arrosage. Prendre des valeurs raisonnables de R, Q_v et L et en déduire ΔP. Commenter l'ordre de grandeur obtenu. Vérifier ensuite, à l'aide du nombre de Reynolds, que la loi de Poiseuille était bien applicable.

<u>Exercice 3. Viscosimètre à chute de bille</u> (contrôle du 22 octobre 2021)

Afin de mesurer la viscosité η d'un liquide, on lâche une bille dans le liquide sans vitesse initiale, et on mesure son temps de chute entre deux points situés sur une même verticale. On suppose dans la suite que Re<<100.

a) Faire le bilan des forces exercées sur la bille, et écrire le principe fondamental de la dynamique appliqué à la bille. Le projeter sur l'axe Oz orienté vers le bas, et en déduire une équation différentielle sur v_z, la vitesse de la bille.

b) Résoudre cette équation pour obtenir $v_z(t)$. Tracer l'allure de la courbe obtenue.

c) Trouver l'expression du temps caractéristique τ associé à la chute de la bille, et de la vitesse limite de la bille v_{lim}

d) Application numérique : on considère une bille d'acier (masse volumique 7.85 10^3 kg.m^{-3}) dans de l'huile (η = 1 Pa.s, $\rho = 10^3$ kg.m^{-3}). Calculer τ, v_{lim} et Re dans le cas d'une bille de 1cm de rayon et dans celui d'une bille de 1 mm de rayon. Commenter le résultat, notamment sur la validité du raisonnement effectué.

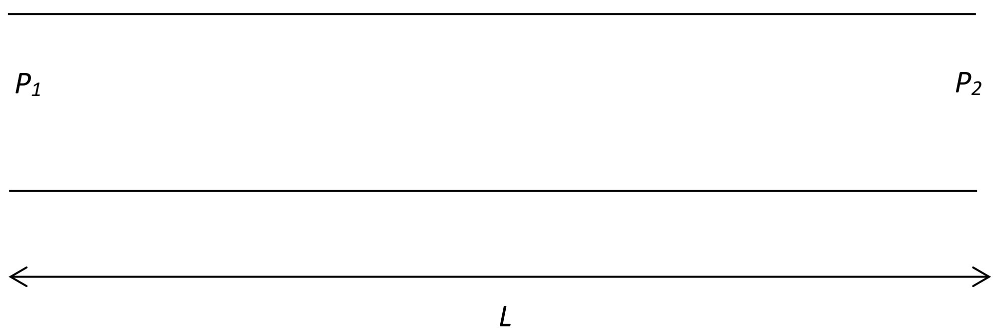
e) Refaire les calculs dans le cas de l'eau et conclure.

Exercice 3bis. Gouttelette d'eau dans un nuage

On considère une gouttelette d'eau dans un nuage, de rayon R = 5 µm.
Effectuer le bilan des forces sur la gouttelette. En déduire la vitesse de chute de la gouttelette en régime permanent. Commenter la dépendance en R du résultat. Estimer le nombre de Reynolds et commenter le résultat.
Pourquoi les nuages « flottent »-ils dans l'air, et pourquoi donnent-ils parfois de la pluie ?

Exercice 4 : Pertes de charge dans une conduite droite (contrôle octobre 2021)

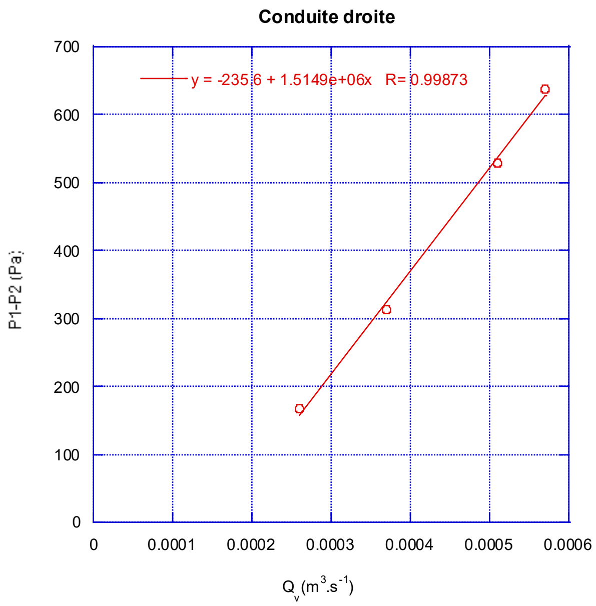
On considère maintenant de l'eau en écoulement dans un tuyau cylindrique de section S constante, de longueur L. Sur le schéma ci-dessous, l'eau s'écoule de la gauche vers la droite.



1) Si on considère l'eau comme un fluide parfait, que peut-on dire de la pression P_2 en aval par rapport à la pression P_1 en amont ?
2) On considère maintenant l'eau comme un fluide visqueux, de viscosité η. On rappelle la loi de Poiseuille pour un écoulement d'un fluide visqueux dans une conduite cylindrique :

$$\Delta P = P_1 - P_2 = \frac{8\eta L}{\pi R^4} Q_v$$

où :
R est le rayon de la conduite cylindrique
Q_v est le débit volumique
On mesure ΔP en fonction de Q_v et on obtient la courbe suivante :



Le diamètre de la conduite est D = 22.5 mm, la longueur est L = 535 mm

1) Comparer la pente de la droite obtenue expérimentalement à la valeur théorique issue de la loi de Poiseuille.
2) Évaluer le nombre de Reynolds, et conclure sur la validité de la loi de Poiseuille dans ce cas.

<u>Exercice 5. Viscosité du sang</u> (contrôle janvier 2023)

On s'intéresse dans cet exercice à l'écoulement du sang pour un être humain dans l'aorte, les veines et les artères, ainsi que dans les capillaires. Les diamètres respectifs de ces « tuyaux » sont indiqués dans le document ci-dessous, extrait d'un article scientifique (datant de 2014).

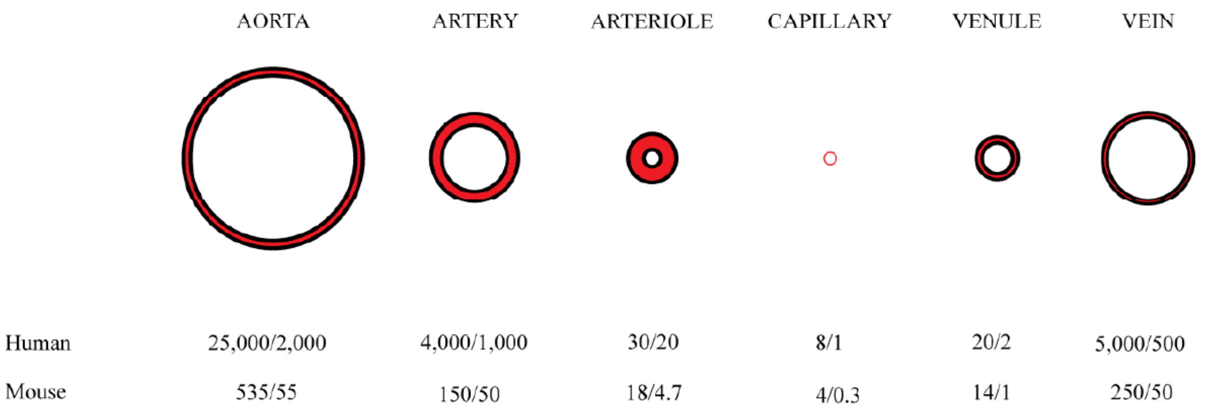
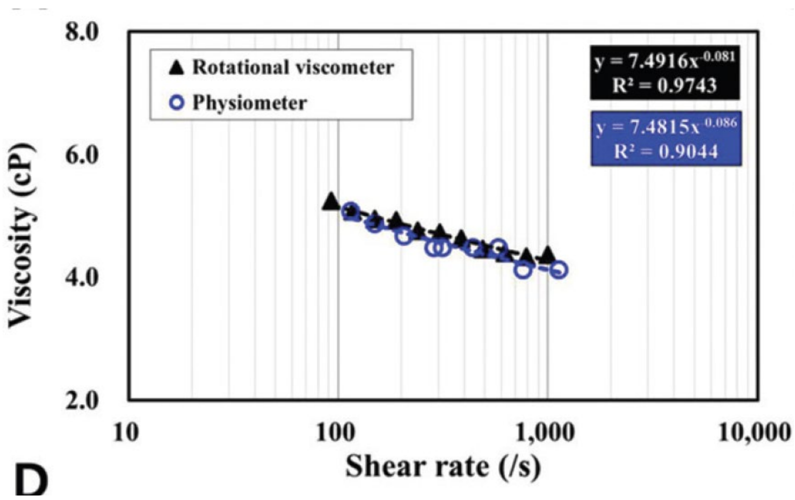


Fig. 2. The typical diameters/wall thicknesses of blood vessel for humans and mice are given in micrometers. The smallest capillaries have diameters of a very few micrometers and a wall thickness of about one micrometer.

D'autre part, on trouve l'information suivante dans un autre article :
« Dans le système circulatoire, le nombre de Reynolds est de 3000 (valeur moyenne) et de 7500 pour l'aorte, 500 pour une artère typique, 0,001 dans un capillaire et 400 pour une veine typique. » (traduit de l'anglais)

Enfin, dans un dernier article, on trouve la courbe suivante :

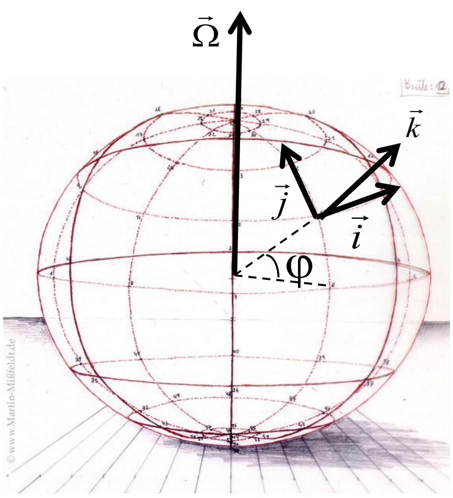


On donne les informations suivantes :

- 1 cP = 1 mPa.s
- « Shear rate » : taux de cisaillement, en s^{-1}
- La masse volumique du sang est proche de celle de l'eau

1. A l'aide du graphique ci-dessus, combien vaut environ la viscosité du sang pour le taux de cisaillement le plus faible mesuré ?
2. Dans quels « tuyaux » du corps l'écoulement sanguin est-il laminaire ? Turbulent ?
3. Déduire des documents la vitesse typique du sang dans : l'aorte, une artère typique, une veine typique, et un capillaire. Calculer également les débits volumiques correspondants, en L/mn.
4. A partir du dernier graphique, en déduire si le sang peut être considéré comme un fluide newtonien ou non (préciser).

Exercice 6 : mouvements de l'atmosphère terrestre



Dans le référentiel terrestre, qui n'est pas galiléen, l'équation de Navier-Stokes s'écrit de la manière suivante :

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \vec{g} - \frac{1}{\rho}\vec{\nabla}P + \upsilon\Delta\vec{v} - 2\vec{\Omega}\wedge\vec{v} \qquad (1)$$

Où le dernier terme $-2\vec{\Omega}\wedge\vec{v}$ correspond à la force d'inertie de Coriolis. $\vec{\Omega}$ est le vecteur vitesse angulaire de rotation de la Terre sur son axe.

Cette équation est applicable aux fluides que sont l'océan ou l'atmosphère. On va considérer ici l'atmosphère, et on va montrer ici qu'à l'échelle de la planète, il est indispensable de prendre en compte la force de Coriolis.

1) Pour une vitesse $\vec{v}$ horizontale et dirigée vers le nord, quels sont la direction et le sens de la force de Coriolis ?
2) L'équation (1) peut se réécrire, après projection sur un plan horizontal :

$$\frac{D\vec{v}_H}{Dt} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}_H P + \upsilon\Delta\vec{v}_H - f\vec{k}\wedge\vec{v}_H \quad (2)$$

Où :

- $\vec{v}_H$ est la projection de la vitesse dans le plan horizontal.
- $f = 2\,\Omega\sin\varphi$; φ = latitude

Pourquoi cette projection sur un plan horizontal a-t-elle un sens ?
Indice : comparer la hauteur de l'atmosphère avec le rayon de la Terre et conclure.

3) Faire le rapport en ordre de grandeur entre la force convective et la force de Coriolis, en utilisant les valeurs suivantes :
Vitesse typique : 10 $m.s^{-1}$; échelle de longueur typique : 1000 km ; Ω à trouver ; prendre une latitude φ moyenne.
Conclure à partir de la valeur du rapport trouvée.