Université Paris-Saclay — Année 2024-2025
MDD201 Analyse

Feuille 2 : suites et séries de fonctions

1 Enoncés

Exercice 1. Déterminer l'ensemble où la suite de fonctions (f_n) converge simplement lorsque

a) $f_n(x) = x^n$ b) $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$ c) $f_n(x) = n^x$

d) $f_n(x) = x^n e^n$ e) $f_n(x) = \frac{\sin(n^2 x)}{n}$ f) $f_n(x) = n\sin(\frac{x}{n})$

g) $f_n(x) = n^2(\cos(\frac{x}{n}) - 1)$

Le cas échéant, on donnera la fonction limite simple.

Exercice 2. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ la suite de fonctions définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{x+n}$.

1. Montrer que pour chaque $x \in \mathbb{R}^+$, la suite numérique $(f_n(x))_{n\geq 1}$ converge. En déduire que la suite (f_n) converge simplement vers une fonction f que l'on précisera.
2. a) Pour $n \geq 1$, dresser le tableau de variations de la fonction f_n.
   b) En déduire la valeur de $||f_n - f||_\infty := \sup_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x) - f(x)|$. La suite (f_n) converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}^+$?
3. Montrer que pour tout $a > 0$, la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[0, a]$.

Exercice 3. Pour tout $n \geq 1$ entier et $x \in [0, +\infty[$, on pose

$$f_n(x) = n \text{ arctan}\left(\frac{x}{n}\right)$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$ converge simplement sur $[0, +\infty[$ vers une fonction f qu'on précisera.
2. a) Montrer que pour tout u réel, on a : $0 \leq 1 - \dfrac{1}{1+u^2} \leq u^2$. En déduire que pour tout $u \in [0, +\infty[$, on a : $0 \leq u - \arctan(u) \leq \dfrac{u^3}{3}$.
   b) Soit a un réel > 0. Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $[0, a]$ vers f.
3. Montrer que cette convergence n'est pas uniforme sur $[0, +\infty[$.

Exercice 4. Soit $a > 0$. Etudier la convergence normale de la série de fonctions $\sum f_n$ lorsque la suite de fonctions (f_n) est définie par :

a) $f_n : x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{n^3+x^2}$, $n \geq 1$ b) $f_n : x \in [-a, a] \mapsto e^{-(x-n)^2}$, $n \geq 0$

c) $f_n : x \in]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[\mapsto e^{-n^2x^2}$, $n \geq 0$ d) $f_n : x \in [-a, a] \mapsto e^{-n^2x^2}$, $n \geq 0$

Exercice 5. Soit $u_n : x \in [0, +\infty[\mapsto \dfrac{\arctan(nx)}{n^2}$ pour $n \geq 1$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge normalement sur $[0, +\infty[$.
2. Soit $a > 0$ quelconque fixé. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n'$ converge normalement sur $[a, +\infty[$.
3. Si on note S la somme de la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$, montrer que S est continue sur $\mathbb{R}^+$ et de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

Exercice 6. Soit $u_n : x \in [0, 1] \mapsto \dfrac{1}{n-x} - \dfrac{1}{n+x}$ pour $n \geq 2$.

1. Montrer que les fonctions u_n sont continues sur $[0, 1]$ et que, pour tout $x \in [0, 1]$, on a
$$|u_n(x)| \leq \frac{2}{n^2-1}.$$
En déduire que la série de fonctions $\sum_{n\geq 2} u_n$ converge normalement sur $[0, 1]$.
On définit la fonction $u : x \mapsto \sum_{n=2}^{+\infty} u_n(x)$.
2. Montrer que u est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$.
3. Montrer que
$$\int_0^1 u(x)\,dx = \sum_{n=2}^{+\infty} \Big(\ln\Big(\frac{n}{n-1}\Big) - \ln\Big(\frac{n+1}{n}\Big)\Big).$$
4. En déduire $\int_0^1 u(x)\,dx = \ln(2)$.

Exercice 7. Soit $I(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2x}$, pour $x > 0$. (On rappelle que, par définition, $I(x) = \displaystyle\lim_{A\to+\infty} \int_0^A \frac{dt}{1+t^2x}$.) Calculer l'intégrale impropre convergente $I(x)$ par un changement de variable.
Soit $u_n : x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \dfrac{1}{1+n^2x}$, pour $n \geq 0$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.
On peut donc définir la fonction $S : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que la fonction S est décroissante sur $]0, +\infty[$.

3. Soit $\epsilon > 0$. Montrer qu'il existe un entier n_ϵ tel que

$$\forall x \geq 1, \quad 1 \leq S(x) \leq \sum_{n=0}^{n_\epsilon} \frac{1}{1+n^2x} + \epsilon.$$

   En déduire que $S(x)$ tend vers 1 quand x tend vers $+\infty$.

4. Montrer que, pour tout $x > 0$, on a

$$\int_0^{n+1} \frac{dt}{1+t^2x} \leq \sum_{k=0}^{n} u_k(x) \leq 1 + \int_0^n \frac{dt}{1+t^2x}$$

   puis que $I(x) \leq S(x) \leq 1 + I(x)$.

5. Donner un équivalent de $S(x)$ en 0^+.

6. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ converge normalement sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$.

7. Montrer que S est continue sur $]0, +\infty[$.

Exercice 8. Pour tout $n \geq 1$ entier, on note w_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $w_n(x) = \dfrac{x}{x^2+n^2}$ et v_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$v_n(x) = (-1)^{n-1} w_n(x) = (-1)^{n-1} \frac{x}{x^2+n^2}.$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

2. a) Etudier les variations de la fonction w_n sur $[0, +\infty[$.

   b) Montrer alors que $\sum_{n\geq 1} v_n$ ne converge pas normalement sur $[0, +\infty[$.

3. Montrer que, par contre, $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.

Exercice 9. Dans ce qui suit, α désigne un paramètre réel > 0. Pour tout $n \geq 1$ entier, on note u_n la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $u_n(x) := \dfrac{x}{n^\alpha(1+nx^2)}$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge simplement sur $[0, +\infty[$.

2. a) Etudier les variations de la fonction u_n sur $[0, +\infty[$.

   b) Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge normalement sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $\alpha > \dfrac{1}{2}$.

   On se place désormais dans le cas $\alpha = 1$, donc $u_n(x) := \dfrac{x}{n(1+nx^2)}$ et on note pour tout $x \in [0, +\infty[$, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x)$ la somme de la série de fonctions.

3. a) Montrer que la série des dérivées $\sum_{n\geq 1} u_n'$ converge normalement sur tout segment $[a, b] \subset]0, +\infty[$ (avec $a < b$).

   b) Montrer que S est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$.

4. a) Montrer que pour tout $p \geq 1$, on a $\sqrt{p}\, S\left(\frac{1}{\sqrt{p}}\right) \geq \sum_{n=1}^{p} \frac{1}{n(1+\frac{n}{p})}$.

   b) En déduire que S n'est pas dérivable (à droite) en 0.

5. a) On pose $v_n(x) = x u_n(x)$. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge normalement sur $[0, +\infty[$.

   b) En déduire $\lim_{x\to+\infty} xS(x)$ et un équivalent de $S(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Problème (A chercher en autonomie) : construction d'une fonction continue partout sur $\mathbb{R}$ mais dérivable nulle part

Pour chaque n entier ≥ 0, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f_n en posant $f_n(x) = 2^{-n} \sin\left(2^{n^2} x\right)$.

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. On appelle f la somme de cette série de fonctions. Vérifier que f est continue sur $\mathbb{R}$ et 2π périodique.

   On va montrer que f n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$.

2. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a :

$$\left(\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right) - \sin(y)\right)^2 + \left(\sin\left(y-\frac{\pi}{2}\right) - \sin(y)\right)^2 = 2.$$

   En déduire que pour chaque y dans $\mathbb{R}$, on peut trouver un $\epsilon(y) = \pm 1$ tel que

$$\left|\sin\left(y+\epsilon(y)\frac{\pi}{2}\right) - \sin(y)\right| \geq 1.$$

3. Soit x un réel fixé. A chaque entier $N \geq 1$, on associe l'accroissement réel h_N définie par :

$$h_N = \epsilon\left(2^{N^2}x\right) \frac{\pi}{2^{N^2+1}}.$$

   Vérifier qu'on a :

   a) $f(x+h_N) - f(x) = \sum_{n=0}^{N} (f_n(x+h_N) - f_n(x))$;

   b) $\left|\frac{f_N(x+h_N) - f_N(x)}{h_N}\right| \geq \frac{1}{\pi} 2^{N^2-N+1}$;

   c) $\left|\sum_{n=0}^{N-1} \frac{f_n(x+h_N) - f_n(x)}{h_N}\right| \leq \sum_{n=0}^{N-1} \frac{2^{n^2}}{2^n} \leq 2^{(N-1)^2+1}$.

4. Déduire de ce qui précède que f n'est pas dérivable en x.

2 Programme semaine 40

On essaie de faire les exercices 1, 2 et 3 autour des suites de fonctions.

3 Programme semaine 41

On essaie de faire les exercices 4, 5 et 6 autour de la notion de convergence normale et des gros théorèmes qui concernent la régularité des fonctions sommes de séries de fonctions.

4 Programme semaine 42

On essaie de faire les exercices 7, 8 et 9.