Feuille d'exercices 2. Corrigé

Ensembles et applications

Exercice 2.1. Ensembles et tautologies
Soit X un ensemble et A, B deux sous-ensembles de X. Montrer que $A \subset B$ ssi $B^c \subset A^c$. Faire un dessin.

Exercice 2.2. Soient A et B deux ensembles.
1. Montrer que l'énoncé $A \subset B$ est équivalent à chacun des énoncés suivants :

$A \cup B = B$
$A \cap B = A$
$A \setminus B = \emptyset$
2. Montrer que $A = B$ ssi $A \Delta B = \emptyset$.

Réponse : 1.a. Supposons $A \subset B$, et montrons $A \cup B = B$. L'inclusion $B \subset A \cup B$ est toujours vraie, et pour l'inclusion réciproque, si $x \in A \cup B$, soit $x \in B$, soit $x \in A$ et dans ce cas aussi $x \in B$ puisque $A \subset B$: on a bien $A \cup B \subset B$.
Réciproquement, supposons $A \cup B = B$ et montrons $A \subset B$. Si $x \in A$, alors a fortiori $x \in A \cup B = B$, ce qu'on voulait.
1.b. Supposons $A \subset B$, et montrons $A \cap B = A$. L'inclusion $A \cap B \subset A$ est toujours vraie, et pour l'inclusion réciproque, si $x \in A$, on a aussi $x \in B$ puisque $A \subset B$, donc $x \in A \cap B$: on a bien $A \subset A \cap B$.
Réciproquement, supposons $A \cap B = A$ et montrons $A \subset B$. Si $x \in A$, alors $x \in A \cap B$ par hypothèse, et en particulier $x \in B$, ce qu'on voulait.
1.c. $A \subset B$ signifie $\forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$. Sa négation est équivalente à $\exists x\ (x \in A$ et $x \notin B)$, ce qui signifie $A \setminus B \neq \emptyset$. On a donc montré : non $(A \subset B) \Leftrightarrow (A \setminus B) \neq \emptyset$, ce qui est équivalent à : $(A \subset B) \Leftrightarrow (A \setminus B = \emptyset)$.
2. Supposons $A = B$. En utilisant le résultat 1.c, on a $A \setminus B = B \setminus A = \emptyset$, donc $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \emptyset$.
Réciproquement, si $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = \emptyset$, on doit avoir $A \setminus B = \emptyset$ et $B \setminus A = \emptyset$ (si l'un des deux ensembles est non-vide, leur union est aussi non-vide), ce qui donne en utilisant le résultat 1.c : $A \subset B$ et $B \subset A$, et donc $A = B$.

Exercice 2.3. Ensembles et tautologies
Soit X un ensemble et A, B, C des sous-ensembles de X. En s'inspirant des tautologies du chapitre 1, écrire différemment les ensembles suivants. Faire des dessins.
1. $(A \cup B)^c$
2. $(A \cap B)^c$
3. $A \cap (B \cup C)$
4. $A \cup (B \cap C)$

Exercice 2.4. Ensemble des parties
Donner la liste des éléments des ensembles suivants :
$\mathcal{P}(\emptyset)$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))$, $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$.
Réponse : $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$
$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
$\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset))) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\}$

Exercice 2.5. Paire et couple
Soient deux objets a et b. On veut justifier qu'on peut définir le couple (a, b) comme l'ensemble $\{\{a\}, \{a, b\}\}$: montrer que si $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a'\}, \{a', b'\}\}$, alors $a = a'$ et $b = b'$ (indication : traiter à part le cas où $a = b$ et le cas où $a \neq b$).
Réponse : On remarque tout d'abord que si $a = b$, alors $\{a, b\} = \{a\}$, en particulier l'ensemble $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ n'a q'un seul élément, à savoir $\{a\}$. Et si $a \neq b$, alors $\{a, b\} \neq \{a\}$ (le premier ensemble a deux éléments, alors que le deuxième en a un seul), donc l'ensemble $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ a deux éléments. La même chose vaut pour $\{\{a'\}, \{a', b'\}\}$.
On suppose maintenant que $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a'\}, \{a', b'\}\}$.
Si $a = b$, alors $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ a un seul élément, donc il doit en être de même pour $\{\{a'\}, \{a', b'\}\}$, ce qui implique que $a' = b'$. L'égalité s'écrit alors $\{\{a\}\} = \{\{a'\}\}$, ce qui implique $\{a\} = \{a'\}$ (c'est le seul élément de ces ensembles), puis $a = a'$ (idem). Et comme $b = a$ et $b' = a'$, on a aussi $b = b'$.
Si $a \neq b$, alors $\{\{a\}, \{a, b\}\}$ a deux éléments, donc il doit en être de même pour $\{\{a'\}, \{a', b'\}\}$, ce qui implique que $a' \neq b'$. Dans $\{\{a\}, \{a, b\}\}$, un des éléments est un ensemble à un élément, à savoir $\{a\}$, et l'autre est un ensemble à deux éléments, à savoir $\{a, b\}$. La même chose vaut pour $\{\{a'\}, \{a', b'\}\}$. Pour que $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a'\}, \{a', b'\}\}$, il faut donc que $\{a\} = \{a'\}$ et $\{a, b\} = \{a', b'\}$ (car un ensemble à un élément ne peut pas être égal à un ensemble à deux éléments). Comme on l'a déjà vu, la première égalité donne que $a = a'$, et la seconde devient $\{a, b\} = \{a, b'\}$, avec b et b' différents de a, donc $b = b'$.

Exercice 2.6. Injection, surjection, bijection
Soient X, Y, Z trois ensembles et $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications.
1. On suppose que f et g sont injectives. Montrer que $g \circ f$ est injective.
2. On suppose que f et g sont surjectives. Montrer que $g \circ f$ est surjective.
3. On suppose que f et g sont bijectives. Montrer que $g \circ f$ est bijective. Exprimer l'application réciproque $(g \circ f)^{-1}$ en fonction de f^{-1} et de g^{-1}.

Exercice 2.7. Image directe, image réciproque
Soit une application $f : X \to Y$.
1. Soit A un sous-ensemble de X. Montrer que $A \subset f^{-1}(f(A))$.
2. Soit B un sous-ensemble de Y. Montrer que $f(f^{-1}(B)) \subset B$.
3. Un exemple : soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = x^2$. Déterminer $f^{-1}(f([0, 2]))$ et $f(f^{-1}([-1, 1]))$.

Exercice 2.8. Image réciproque
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = \sin(x)$. Détermier $f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}(\mathbb{R}_+)$.
Réponse : Par définition, $f^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{R}; f(x) \in \{0\}\} = \{x \in \mathbb{R}; f(x) = 0\}$. Or on sait que $\sin(x) = 0$ ssi x est de la forme $k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, donc $f^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{R}; \exists k \in \mathbb{Z}, x = k\pi\}$. Puis

$f^{-1}(\mathbb{R}_+) = \{x \in \mathbb{R}; f(x) \in \mathbb{R}_+\} = \{x \in \mathbb{R}; f(x) \geq 0\}$. Là aussi, en utilisant les propriétés connues de la fonction sinus, on trouve

$$f^{-1}(\mathbb{R}_+) = \{x \in \mathbb{R}; \exists k \in \mathbb{Z}, x \in [2k\pi, (2k+1)\pi]\} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi].$$

Exercice 2.9. Bijection

1. Soient a et b deux réels et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = ax+b$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a et b pour que f soit bijective. Donner dans ce cas l'application réciproque f^{-1}.

2. Soit l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 + 2x$. En fonction des valeurs de y, déterminer le cardinal de $f^{-1}(\{y\})$. L'application f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 2.10. Fonction indicatrice

Soit X un ensemble, et A un sous-ensemble de X. La fonction indicatrice de A, notée $\mathbf{1}_A$, est l'application

$$\begin{array}{rccc} \mathbf{1}_A & : & X & \to & \{0,1\} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases} \end{array}$$

1. Soient A et B deux sous-ensembles de X. Exprimer les fonctions indicatrices de A^c, de $A \cap B$ et de $A \cup B$ en fonction de $\mathbf{1}_A$ et de $\mathbf{1}_B$.

2. Soient F l'ensemble des applications de X dans $\{0,1\}$. Soit l'application

$$\begin{array}{rccc} I & : & \mathcal{P}(X) & \to & F \\ & & A & \mapsto & \mathbf{1}_A \end{array}$$

Montrer que I est une bijection, et déterminer l'application réciproque $I^{-1} : F \to \mathcal{P}(X)$.

3. On suppose maintenant que X est un ensemble fini, de cardinal n. Déduire de ce qui précède que

$$\mathrm{card}(\mathcal{P}(X)) = 2^n$$

Exercice 2.11. Ensemble des parties

Le but de cet exercice est de montrer qu'il n'existe pas de surjection de X dans $\mathcal{P}(X)$.

1. On suppose ici que X est fini. En utilisant l'exercice 2.10, montrer qu'il n'existe pas de surjection de X dans $\mathcal{P}(X)$.

2. On traite maintenant le cas général, c'est-à-dire que X peut être fini ou infini. On suppose par l'absurde qu'il existe une surjection $f : X \to \mathcal{P}(X)$.

a. Soit $A = \{x \in X; x \notin f(x)\}$. Justifier qu'il existe $c \in X$ tel que $f(c) = A$.

b. Étudier si $c \in A$ et conclure.

3. Une conséquence : peut-on trouver une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui énumère tous les sous-ensembles de $\mathbb{N}$?

Réponse : 1. Si X est un ensemble fini à n éléments, on sait d'après l'exercice 2.10 que $\mathrm{card}(\mathcal{P}(X)) = 2^n$. Or on sait que $2^n > n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on peut le montrer par récurrence par exemple). Ainsi $\mathrm{card}(X) < \mathrm{card}(\mathcal{P}(X))$, donc il ne peut pas exister de surjection de X dans $\mathcal{P}(X)$ d'après le principe

des tiroirs.
2.a. On a supposé par hypothèse que f est surjective de X vers $\mathcal{P}(X)$, donc en particulier puisque $A \in \mathcal{P}(X)$, il existe $c \in X$ tel que $f(c) = A$.
2.b. Par définition de A, et comme $c \in X$, $c \in A$ ssi $c \notin f(c)$. Or $f(c) = A$ donc on obtient $c \in A$ ssi $c \notin A$: c'est absurde. Donc notre hypothèse de départ est fausse : il n'existe pas de surjection de X dans $\mathcal{P}(X)$.
3. On ne peut pas trouver une telle énumération, puisqu'on aurait alors une application $f : \mathbb{N} \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ définie par $f(i) = A_i$, qui serait surjective puisqu'on a supposé que tous les sous-ensembles de $\mathbb{N}$ sont dans la liste (A_i) : c'est impossible par la question précédente.

Exercice 2.12. Cardinal d'une réunion
Tous les ensembles considérés dans cet exercice sont supposés finis.
1. Rappeler la formule donnant le cardinal de $A \cup B$ en fonction des cardinaux de A, B et $A \cap B$.
2. En utilisant la formule précédente, exprimer le cardinal de $A \cup B \cup C$ en fonction des cardinaux de A, B, C et de leurs différentes intersections.
3. Pour tout $n \geq 2$, conjecturer, et éventuellement démontrer, une formule qui exprime le cardinal de $A_1 \cup \ldots \cup A_n$ en fonction des cardinaux de $A_1, \ldots, A_n$ et de leurs différentes intersections.

Exercice 2.13. Nombre d'injection entre deux ensembles finis
Soit X un ensemble fini à p éléments et Y un ensemble fini à n éléments, et $I(X, Y)$ l'ensemble des injections de X dans Y. Le but de cet exercice est de trouver le cardinal de $I(X, Y)$ en fonction de p et de n.
1. Quel est le cardinal de $I(X, Y)$ quand $n < p$?
2. On suppose que $p = 0$. Justifier que $\text{card}(I(X, Y)) = 1$.
3. On va montrer que $\text{card}(I) = \frac{n!}{(n-p)!}$ par récurrence sur p.
On suppose que $\text{card}(X) = p+1$, on fixe un élément x_0 dans X et on pose $X' = X \setminus \{x_0\}$. Dénotons par $y_1, \ldots, y_n$ les n éléments de Y, et posons, pour tout i entre 1 et n :

$$A_i = \{f \in I(X, Y); f(x_0) = y_i\}$$

a. Montrer que les ensembles $A_1, \ldots, A_n$ sont deux à deux disjoints et que $I(X, Y) = A_1 \cup \ldots \cup A_n$.
b. Montrer que pour tout i entre 1 et n, l'application

$$\begin{array}{ccc} A_i & \to & I(X', Y \setminus \{y_i\}) \\ f & \mapsto & f_{|X'} \end{array}$$

est bien définie et est une bijection.
c. Conclure la démonstration du résultat voulu.
4. Un cas particulier. Soit X un ensemble fini de cardinal n. On appelle permutation de X une bijection de X dans X. Combien y a-t-il de permutations de X ? (on rappelle que $0! = 1$)
Réponse : 1. D'après le principe des tiroirs, si $\text{card}(Y) = n < p = \text{card}(X)$, alors il n'y a pas d'injection de X dans Y, donc $\text{card}(I(X, Y)) = 0$.
2. Si $p = 0$, $X = \emptyset$, et donc la seule application de X dans Y est l'application vide, et donc $\text{card}(I(X, Y)) = 1$.
3.a. Si $f \in A_i \cap A_j$ pour $i \neq j$, alors on a à la fois $f(x_0) = y_i$ et $f(x_0) = y_j$, ce qui est impossible

puisque $y_i \neq y_j$. Donc $A_i \cap A_j = \emptyset$. Puis, pour n'importe quel $f \in I(X,Y)$, on sait que $f(x_0) \in Y$, donc c'est soit y_1, soit y_2, ... , soit y_n. Cela signifie que $f \in A_1$ ou $f \in A_2$ ou ... ou $F \in A_n$. Donc $I(X,Y) \subset A_1 \cup \ldots \cup A_n$, et comme l'inclusion réciproque est évidente, il y a égalité.
3.b. On fixe i entre 1 et n. Soit $f \in A_i$. Pour tout $x \in X'$, $x \neq x_0$ donc $f(x) \neq f(x_0)$ car f est injective. Or $f(x_0) = y_i$ puisque $f \in A_i$, donc $f(x) \neq y_i$: on a montré que pour tout $x \in X'$, $f(x) \in Y \setminus \{y_i\}$, c'est-à-dire $f_{|X'}$ est une application de X' vers $Y \setminus \{y_i\}$. De plus, on voit facilement que comme f est une injection, $f_{|X'}$ aussi. Donc l'application donnée est bien définie entre les deux ensembles donnés.
On doit maintenant voir que cette application $\Phi : f \mapsto f_{|X'}$ est bijective. Montrons qu'elle est injective : si $\Phi(f) = \Phi(g)$, alors $f_{|X'} = g_{|X'}$, c'est-à-dire $f(x) = g(x)$ pour tous les $x \in X'$. De plus, comme f et g sont dans A_i, on a aussi $f(x_0) = g(x_0) = y_i$. Ainsi $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in X$, donc $f = g$: Φ est injective.
On montre ensuite qu'elle est surjective : soit $g \in I(X', Y \setminus \{y_i\})$, on veut trouver $f \in A_i$ tel que $\Phi(f) = g$. Posons

$$\begin{array}{cccc} f: & X & \to & Y \\ & x & \mapsto & \begin{cases} g(x) \text{ si } x \in X' \\ y_i \text{ si } x = x_0 \end{cases} \end{array}$$

C'est une injection : si $x \neq x'$ sont dans X', alors $f(x) = g(x)$ et $f(x') = g(x')$ donc $f(x) \neq f(x')$ puisque g est injective ; et si $x \in X'$, donc différent de x_0, alors $f(x) = g(x) \neq f(x_0) = y_i$ puisque $g(x) \in Y \setminus \{y_i\}$; on a ainsi montré dans tous les cas que si x et x' sont deux éléments de X qui sont distincts, alors $f(x) \neq f(x')$. De plus, $f(x_0) = y_i$ par construction donc $f \in A_i$, et $\Phi(f) = f_{|X'} = g$ par construction : Φ est surjective.
Donc Φ est une bijection.
3.c. D'après la question 3.a et le cours, $\mathrm{card}(I(X,Y)) = \mathrm{card}(A_1) + \ldots + \mathrm{card}(A_n)$. Pour tout i, comme il y a une bijection entre A_i et $I(X', Y \setminus \{y_i\})$, on sait que $\mathrm{card}(A_i) = \mathrm{card}(I(X', Y \setminus \{y_i\}))$. Or $\mathrm{card}(X') = p$, donc on peut utiliser l'hypothèse de récurrence : comme $\mathrm{card}(Y \setminus \{y_i\}) = n-1$, on a $\mathrm{card}(I(X', Y \setminus \{y_i\})) = \frac{(n-1)!}{(n-1-p)!}$. Et donc

$$\mathrm{card}(I(X,Y)) = n \times \frac{(n-1)!}{(n-1-p)!} = \frac{n!}{(n-(p+1))!}$$

qui est la formule voulue pour $\mathrm{card}(X) = p+1$ et $\mathrm{card}(Y) = n$.
4. Pour une application de X dans X, on sait qu'elle est bijective ssi elle est injective (car l'ensemble de départ et celui d'arrivée ont le même nombre d'éléments). Il suffit donc de compter les injections de X dans X. Pour cela, on applique la formule précédente avec $\mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(Y) = n$ et on trouve $\mathrm{card}(I(X,X)) = \frac{n!}{0!} = n!$.

Exercice 2.14. Sous-ensembles à p éléments
Soient des entiers n et p tels que $0 \leq p \leq n$, et Y un ensemble de cardinal n. Le but de cet exercice est de compter les sous-ensembles de Y avec exactement p éléments, on note $Z = \{Y' \in \mathcal{P}(Y); \mathrm{card}(Y') = p\}$. On note $X = \{1, \ldots, p\}$, et, comme dans l'exercice 2.13, $I(X,Y)$ l'ensemble des injections de X dans Y. On rappelle que $\mathrm{card}(I(X,Y)) = \frac{n!}{(n-p)!}$.
1. Montrer que l'application

$$\begin{array}{cccc} G & : & I(X,Y) & \to & Z \\ & & f & \mapsto & f(X) \end{array}$$

est bien définie, et qu'elle est surjective.
2. Soit $Y' \in Z$. Montrer qu'on peut identifier $G^{-1}(\{Y'\})$ avec $I(X,Y')$, et en déduire le cardinal de $G^{-1}(\{Y'\})$.
3. En utilisant un résultat du cours, conclure que $\mathrm{card}(Z) = \frac{n!}{(n-p)!p!}$: c'est le coefficient binomial $\binom{n}{p}$.
Réponse : 1. Si $f \in I(X,Y)$, on peut aussi voir f comme une application de X vers $f(X)$. Par hypothèse, f est injective, et si on voit $f(X)$ comme l'ensemble d'arrivée, elle est surjective par définition. Donc f est une bijection de X vers $f(X)$, et donc $\mathrm{card}(f(X)) = \mathrm{card}(X) = p$: $f(X)$ est bien un sous-ensemble de Y à p éléments, donc G est bien une application de $I(X,Y)$ dans Z.
Pour montrer que G est surjective, considérons $A \in Z$, et cherchons $\in I(X,Y)$ tel que $G(f) = f(X) = A$. Par défintion, A est un sous-ensemble de Y à p éléments, que l'on dénote par $y_1, \ldots, y_p$; ils sont deux à deux distincts par hypothèse. Il suffit alors de poser $f(i) = y_i$ pour tout i dans X ; f est bien injective car $y_i \neq y_j$ si $i \neq j$, et $f(X) = \{y_1, \ldots, y_p\} = A$. Donc G est surjective.
2. Par définition, $G^{-1}(\{Y'\})$ est l'ensemble des $f \in I(X,Y)$ tels que $f(X) = Y'$. On peut donc voir de tels f comme des injections de X dans Y' ; et réciproquement, on peut voir une injection f de X vers Y' comme une injection f de X vers Y telle que $f(X) = Y'$. En utilisant l'exercice précédent, avec $\mathrm{card}(X) = p$ et $\mathrm{card}(Y') = p$, on en déduit que $\mathrm{card}(G^{-1}(\{Y'\})) = \mathrm{card}(I(X,Y')) = \frac{p!}{0!} = p!$.
3. On a vu que G est une application surjective de $I(X,Y)$ dans Z, et que pour tout $Y' \in Z$, $\mathrm{card}(G^{-1}(\{Y'\})) = p!$. Donc le théorème du cours nous dit que $\mathrm{card}(I(X,Y)) = p! \times \mathrm{card}(Z)$. Comme on sait que $\mathrm{card}(I(X,Y)) = \frac{n!}{(n-p)!}$ d'après l'exercice précédent, on conclut que $\mathrm{card}(Z) = \frac{n!}{(n-p)!p!}$.

Exercice 2.15. En utilisant le résultat des exercices 2.10 et 2.14, montrer que

$$2^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p}.$$

Redémontrer cette formule en utilisant la formule du binôme de Newton.