

## Partiel d'électromagnétisme

Les quantités vectorielles sont notées en caractères gras.

### 1 Électrostatique du vide et des conducteurs

#### 1.1 Champs créés par les charges

- Loi de Coulomb
  - Donner l'expression vectorielle de la force électrostatique subie par une particule chargée (de charge  $q_2$ ) soumise à l'action d'une autre particule chargée (de charge  $q_1$ ).
  - Dégager de la loi de Coulomb la notion de champ électrostatique  $\mathbf{E}$  créé par la charge  $q_1$ . Énoncer le principe de superposition pour déterminer le champ électrique créé par un ensemble de charges.
- Champs créés par des distributions continues de charges
  - Donner les quatre équations de Maxwell dans le vide dans le cas général d'un régime dépendant du temps, les charges étant maintenant décrites par des distributions volumiques de charge  $\rho$  et de courant  $\mathbf{j}$ .
  - Dans le cas d'un régime permanent, écrire les équations contenant le champ  $\mathbf{E}$ . Laquelle permet de déduire l'existence d'un potentiel électrostatique  $V$ ? Le potentiel  $V$  est-il unique?
- Topographie du champ électrostatique
  - Quel est le lien géométrique entre les surfaces équipotentielles et les lignes de champ?
  - Dans le cas statique, supposons que le potentiel  $V(P)$  atteigne un maximum local en un point  $P$ . Appliquer le théorème de Gauss sur un petit volume entourant le point  $P$  et donner le signe de la charge contenue dans ce petit volume.
  - Conclure à partir de là sur l'existence ou non d'un extremum local du potentiel  $V$  dans un volume vide de charge. Ce résultat est connu sous le nom de théorème de Earnshaw.
  - Les figures 1a et 1b montrent, à deux échelles différentes, les lignes du champ électrostatique créé par un ensemble de trois charges ponctuelles. Ces trois charges sont dans le plan de la figure. Au moins un exemple de chaque type de ligne de champ est dessiné. On note  $q$  la valeur de la plus petite (en module) des charges. Les autres valeurs sont des multiples entiers (positifs ou négatifs) de  $q$ . On donne les coordonnées cartésiennes, des points indiqués sur la figure 1b :  $A=(24,75)$ ,  $B=(0,0)$ ,  $C=(24,-8)$  and  $D=(75,0)$  où  $a$  est l'unité de longueur. D'après les figures :
    - quelles sont les positions et les signes des charges utilisées?
    - Quelle est l'allure du champ à grande distance (cf figure 1a)? Quelle est la charge totale et quelle relation entre les différentes charges peut-on en déduire? On remarquera que la figure 1 est similaire, loin du centre, aux lignes de champs créées par un dipole.
    - dire pourquoi le champ en  $C$  est nul. En projetant ce champ sur l'axe  $x$  des abscisses, en déduire les valeurs des charges en fonction de  $q$ .

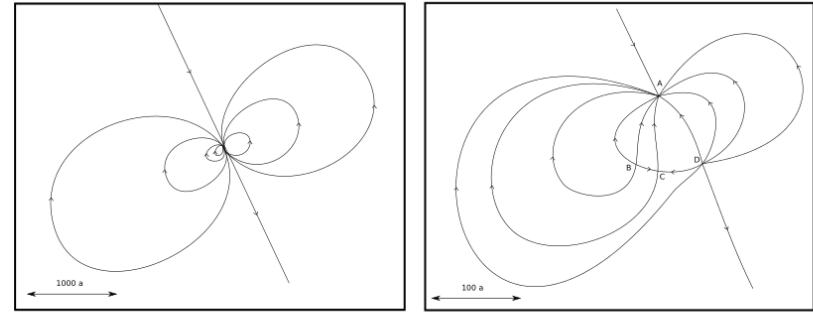


FIGURE 1 – topographie d'un champ électrostatique à deux échelles différentes.

#### 1.2 Conducteurs en équilibre électrostatique

On s'intéresse dans cette partie à un ensemble de conducteurs électriques placés dans le vide. Toutes les questions de cette partie sont indépendantes.

- Donner la définition de l'équilibre électrostatique d'un conducteur. Que peut-on dire alors du comportement à l'intérieur du conducteur du champ  $\mathbf{E}$ , du potentiel  $V$ , et de la densité volumique de charge  $\rho$ .
- On suppose (dans cette question seulement) que le régime d'équilibre électrostatique n'est pas encore atteint et que le conducteur suit la loi d'Ohm avec une conductivité  $\gamma$ . Montrer que  $\rho$  vérifie l'équation  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho}{\tau} = 0$ . Exprimer  $\tau$  en fonction des données du problème. Donner la forme de la solution pour  $\rho(t)$ . Quelle est la signification physique de  $\tau$ ? En déduire une valeur typique de  $\tau$ . On donne  $\epsilon_0 \simeq 8.85 \times 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$  et  $\gamma \simeq 10^7 \text{ S.m}^{-1}$  pour un métal usuel. Discuter du résultat.
- La figure 2 représente trois conducteurs. Le plus grand est creux, porté au potentiel 0, et entoure complètement la zone contenant les deux autres. Le conducteur 1 porte une charge positive. Le conducteur 2 porte une charge nulle. Il n'y a pas de charges en dehors des celles qui sont portées par les conducteurs. Un certain nombre de courbes orientées est dessiné. Certaines sont des lignes de champ électrostatique et d'autres n'en sont pas. Donner les listes des bonnes et des mauvaises lignes en justifiant les réponses. En déduire les signes des potentiels  $V_1$  et  $V_2$  de chacun des conducteurs et comparer  $|V_1|$  à  $|V_2|$ .

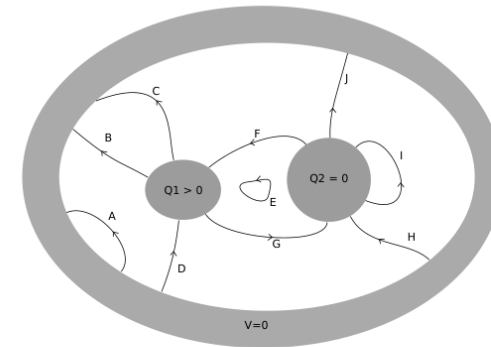


FIGURE 2 – conducteurs en équilibre électrostatique.

## Partiel d'électromagnétisme

Les quantités vectorielles sont notées en caractères gras.

### 1 Électrostatique du vide et des conducteurs

#### 1.1 Champs créés par les charges

##### 1. Loi de Coulomb

- (a) Donner l'expression vectorielle de la force électrostatique subie par une particule chargée (de charge  $q_2$ ) soumise à l'action d'une autre particule chargée (de charge  $q_1$ ).
- (b) Dégager de la loi de Coulomb la notion de champ électrostatique  $\vec{E}$  créé par la charge  $q_1$ . Énoncer le principe de superposition pour déterminer le champ électrique créé par un ensemble de charges.

$$\vec{F}_{12} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}^2} \vec{u}_{12}$$

$$\vec{E}_{12} = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 r_{12}^2} \vec{u}_{12}$$

Principe de superposition: le champ créé par un ensemble de charge est égal à la somme des champs créés par chaque charge.

##### 2. Champs créés par des distributions continues de charges

- (a) Donner les quatre équations de Maxwell dans le vide dans le cas général d'un régime dépendant du temps, les charges étant maintenant décrites par des distributions volumiques de charge  $\rho$  et de courant  $\vec{j}$ .

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \vec{\nabla} \wedge \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & \vec{\nabla} \wedge \vec{B} &= \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned}$$

- (b) Dans le cas d'un régime permanent, écrire les équations contenant le champ  $\mathbf{E}$ . Laquelle permet de déduire l'existence d'un potentiel électrostatique  $V$ ? Le potentiel  $V$  est-il unique?

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{E}' &= \frac{\rho}{\epsilon_0} & \vec{\nabla} \wedge \vec{E}' &= \vec{0} & \rightarrow \exists V / \vec{E}' &= -\vec{\nabla} V & \text{défini à une constante près} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B}' &= 0 & \vec{\nabla} \wedge \vec{B}' &= \mu_0 \vec{j} & & & \text{(non unique)} \end{aligned}$$

### 3. Topographie du champ électrostatique

- (a) Quel est le lien géométrique entre les surfaces équipotentielles et les lignes de champ?

Les équipotentielles sont  $\perp$  aux lignes de champ

- (b) Dans le cas statique, supposons que le potentiel  $V(P)$  atteigne un maximum local en un point  $P$ . Appliquer le théorème de Gauss sur un petit volume entourant le point  $P$  et donner le signe de la charge contenue dans ce petit volume.

$$\begin{aligned} \text{max local de } V : \vec{\nabla} V &= 0 \text{ et } \Delta V < 0 & \Delta V &= -\frac{\rho}{\epsilon_0} < 0 ; \rho > 0 \\ \oiint \vec{E}' \cdot d\vec{s} &= \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} < 0 & \vec{E}' &\text{ est centripète} \end{aligned}$$

- (c) Conclure à partir de là sur l'existence ou non d'un extremum local du potentiel  $V$  dans un volume vide de charge. Ce résultat est connu sous le nom de théorème de Earnshaw.

$$\text{Si } \underline{\rho = 0} \quad \Delta V = 0 \rightarrow \underline{\text{pas d'extremum de } V}$$

(d) Les figures 1a et 1b montrent, à deux échelles différentes, les lignes du champ électrostatique créé par un ensemble de trois charges ponctuelles. Ces trois charges sont dans le plan de la figure. Au moins un exemple de chaque type de ligne de champ est dessiné. On note  $q$  la valeur de la plus petite (en module) des charges. Les autres valeurs sont des multiples entiers (positifs ou négatifs) de  $q$ . On donne les coordonnées cartésiennes, des points indiqués sur la figure 1b :  $A=(24,75)$ ,  $B=(0,0)$ ,  $C=(24,-8)$  and  $D=(75,0)$  où  $a$  est l'unité de longueur. D'après les figures : *manque a*

$$A = (24a; 75a)$$

$$B = (0; 0)$$

$$C = (24a; -8a)$$

$$D = (75a; 0)$$

i. quelles sont ~~les positions et~~ les signes des charges utilisées ?

$$q_A < 0 ; q_B > 0 ; q_D > 0 \quad q_C = 0$$

ii. Quelle est l'allure du champ à grande distance (cf figure 1a) ? Quelle est la charge totale et quelle relation entre les différentes charges peut on en déduire ? On remarquera que la figure 1 est similaire, loin du centre, aux lignes de champs créées par un dipole.

Lignes de champ crée par un dipôle

$$\underline{\Sigma q = 0}$$

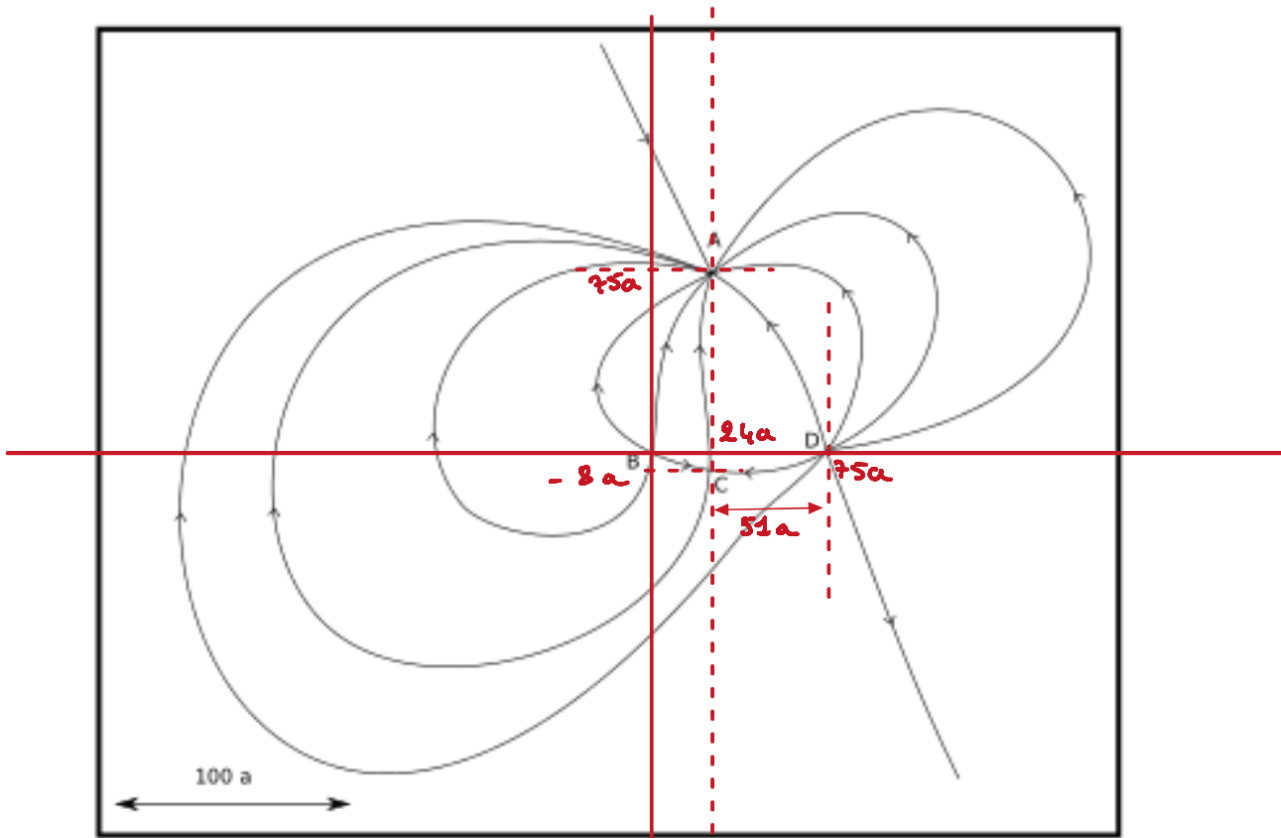
$$\underline{q_A + q_B + q_D = 0}$$

iii. dire pourquoi le champ en  $C$  est nul. En projetant ce champ sur l'axe  $x$  des abscisses, en déduire les valeurs des charges en fonction de  $q$ .

$$\underline{\vec{E}'(C) = \vec{0} \quad \text{car les lignes de champ arrivent et partent}}$$

$$\vec{E}'(C) = \frac{q_A \vec{AC}}{4\pi\epsilon_0 AC^3} + \frac{q_B \vec{BC}}{4\pi\epsilon_0 BC^3} + \frac{q_D \vec{DC}}{4\pi\epsilon_0 DC^3} = \vec{0}$$

projection sur  $\vec{u}_x$        $0 = 0 + \frac{q_B \cdot 24a}{4\pi\epsilon_0 a^3 (24+8)^{3/2}} + \frac{q_D (-51a)}{4\pi\epsilon_0 a^3 (51^2+8^2)^{3/2}}$



$$\begin{aligned} \rightarrow & \left\{ \begin{array}{l} 4q_B = q_D \rightarrow q_B = \frac{q_D}{4} \\ q_B \text{ et } q_D \hat{=} \text{ signe; } |q_B| < |q_D| \end{array} \right. \\ & q_A = -q_B - q_D = -q_B - 4q_B \\ & \qquad \qquad \qquad = -5q_B \end{aligned}$$

$q_B =$  la charge de plus petit module

$$\underline{q_B = q \quad q_D = 4q \quad q_A = -5q}$$

## 1.2 Conducteurs en équilibre électrostatique

On s'intéresse dans cette partie à un ensemble de conducteurs électriques placés dans le vide. Toutes les questions de cette partie sont indépendantes.

1. Donner la définition de l'équilibre électrostatique d'un conducteur. Que peut-on dire alors du comportement à l'intérieur du conducteur du champ  $\mathbf{E}$ , du potentiel  $V$ , et de la densité volumique de charge  $\rho$ .

Equilibre électrostatique: pas de courant

$$\Rightarrow \vec{j} = \vec{0} \quad \vec{j} = \gamma \vec{E} = 0 \Rightarrow \underline{\vec{E} = 0} \Rightarrow \underline{V = \text{cte}} \Rightarrow \Delta V = \frac{-\rho}{\epsilon_0} = 0 \rightarrow \underline{\rho = 0} \quad \leftrightarrow \text{les charges sont en surface}$$

2. On suppose (dans cette question seulement) que le régime d'équilibre électrostatique n'est pas encore atteint et que le conducteur suit la loi d'Ohm avec une conductivité  $\gamma$ . Montrer que  $\rho$  vérifie l'équation  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\rho}{\tau} = 0$ . Exprimer  $\tau$  en fonction des données du problème. Donner la forme de la solution pour  $\rho(t)$ . Quelle est la signification physique de  $\tau$ ? En déduire une valeur typique de  $\tau$ . On donne  $\epsilon_0 \simeq 8.85 \times 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$  et  $\gamma \simeq 10^7 \text{ S.m}^{-1}$  pour un métal usuel. Discuter du résultat.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \gamma \vec{E} = 0 \rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \gamma \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \quad \underline{\tau = \frac{\epsilon_0}{\gamma}}$$

$$\tau = \frac{8,85 \cdot 10^{-12}}{10^7} = \underline{8,85 \cdot 10^{-19} \text{ s}} \rightarrow \text{très court} \quad \text{fréquence} > 10^{18} \text{ Hz}$$

3. La figure 2 représente trois conducteurs. Le plus grand est creux, porté au potentiel 0, et entoure complètement la zone contenant les deux autres. Le conducteur 1 porte une charge positive. Le conducteur 2 porte une charge nulle. Il n'y a pas de charges en dehors des celles qui sont portées par les conducteurs. Un certain nombre de courbes orientées est dessiné. Certaines sont des lignes de champ électrostatique et d'autres n'en sont pas. Donner les listes des bonnes et des mauvaises lignes en justifiant les réponses. En déduire les signes des potentiels  $V_1$  et  $V_2$  de chacun des conducteurs et comparer  $|V_1|$  à  $|V_2|$ .

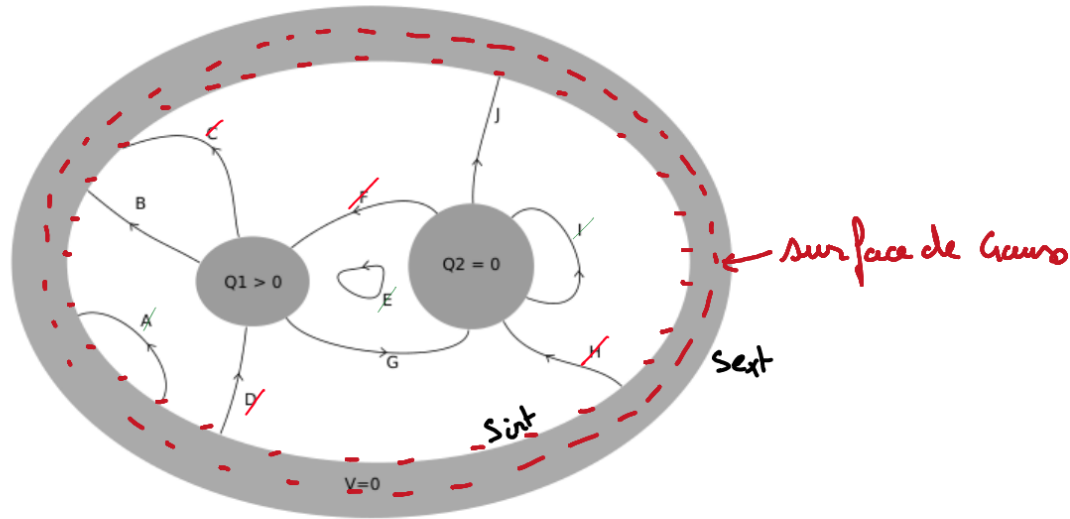


FIGURE 2 – conducteurs en équilibre électrostatique.

charges en surface du grand  
condensateur négatives car :

$$\oiint \vec{E}' \cdot d\vec{S} = 0 \quad \text{dans un conducteur}$$

$$\nabla \cdot \text{Sint} + Q_1 = 0 \quad \nabla = -\frac{\rho_{\pm}}{\text{Sint}} < 0$$

Les lignes de champ sont  $\perp$  équipotentiels  
i.e. aux surfaces des conducteurs et dirigées  
dans les sens des potentiels décroissants.

$\Rightarrow$  fausses lignes de champ :

H ; F ; D car mal orientées

C : car pas  $\perp$  à la surface du conducteur

I ; E ; A : car peut avoir une ligne de champ

il faut  $\vec{E}' \neq 0$  donc  $\Delta V \neq 0$

et une ligne de champ ne boucle

pas sur elle  $\hat{m}$



## 2 Quantité de mouvement du champ électromagnétique

Cet exercice comporte deux parties dont la première vise à démontrer la formule générale donnée par l'équation 1 en section 2.2. La deuxième partie peut être traitée séparément.

On rappelle que pour une fonction scalaire  $s(\mathbf{r})$  et deux champ vectoriel  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  et  $\mathbf{w}(\mathbf{r})$  :

- $\operatorname{div}(s\mathbf{v}) = \nabla \cdot (s\mathbf{v}) = (\nabla s) \cdot \mathbf{v} + s(\nabla \cdot \mathbf{v})$
- $\operatorname{grad}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{w}) + \mathbf{w} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{w} + (\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{v}$

### 2.1 Étude générale

#### 2.1.1 Équation bilan d'une grandeur physique extensive

Une grandeur extensive  $A$  (telle que la masse ou l'énergie) vérifie les propriétés suivantes :

- elle est localisée : elle peut être décrite par une densité volumique  $a$  telle que la quantité de  $A$  dans un volume  $V$  peut s'écrire  $\iiint d^3r a = A$  ;
- elle peut être échangée entre différents systèmes séparés par une surface  $S$ . Le débit sortant de  $S$  associé à ce transfert s'écrit alors  $\iint \mathbf{j}_A \cdot d\mathbf{S}$  où  $\mathbf{j}_A$  est la densité de courant associée à  $A$  ;
- elle peut être créée dans le volume d'un système. Cette réaction étant décrite par le taux de création par unité de volume et de temps  $\alpha$  tel que, dans le volume  $V$ ,  $\frac{\delta A_{\text{creation}}}{\delta t} = \iiint_V \alpha d^3r$ .

En faisant le bilan de la grandeur  $A$ , démontrer l'équation-bilan locale reliant  $a$ ,  $\alpha$  et  $\nabla \cdot \mathbf{j}_A$ .

#### 2.1.2 Quantité de mouvement du champ électromagnétique

On se place maintenant en régime variable quelconque. On utilise les équations de Maxwell dans le vide en présence de charges et de courants décrits par des densités volumiques.

1. **Densité volumique de forces.** On étudie un volume élémentaire  $d\tau$  dans lequel existe une densité volumique de charges  $\rho$  et une densité volumique de courant  $\mathbf{j}$ . Calculer la force électromagnétique subie par ce volume  $d\tau$ . Exprimer la densité volumique de force  $\frac{d\mathbf{F}}{d\tau} = \mathbf{f}$  en fonction de  $\rho$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$ .
2. **Equation bilan de quantité de mouvement.** A l'aide des équations de Maxwell, mettre l'expression  $\mathbf{Y} = \mathbf{f} + \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B})$  sous une forme où n'apparaissent que les champs  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  ainsi que certaines de leurs dérivées spatiales (mais pas leur dérivée temporelle).
3. On remarquera que l'expression de  $\mathbf{Y}$  comporte deux termes, l'un faisant intervenir uniquement  $\mathbf{E}$ , et l'autre  $\mathbf{B}$  uniquement. Soit  $\mathbf{u}$  un vecteur constant quelconque.  $\mathbf{Y} \cdot \mathbf{u}$  comporte donc également deux termes. Développer l'expression  $\nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{E}^2}{2} \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} \right)$ , et la comparer avec le terme de  $\mathbf{Y} \cdot \mathbf{u}$  contenant  $\mathbf{E}$ . On utilisera la relation  $\mathbf{u} \cdot ((\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E}) = \mathbf{E} \cdot (\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{E})) = \sum_{ij} E_i u_j \partial_i E_j$  (BONUS : la montrer).
4. Sans calcul supplémentaire, justifier que  $\frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{B}^2}{2} \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} \right) = -\frac{1}{\mu_0} ((\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u}$ .
5. Montrer alors que l'expression complète de  $\mathbf{Y} \cdot \mathbf{u}$  peut s'écrire sous la forme de la divergence d'un champ de vecteur.
6. Comment s'appelle ce champ de vecteur ?
7. **Interprétation.** En lien avec la question 2.1.1, déterminer les quantités  $a$ ,  $\alpha$  et  $\mathbf{j}_A$  considérées dans cette question.
8. Montrer alors que  $\mathbf{g} = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$  peut s'interpréter comme une densité volumique de quantité de mouvement associée au champ électromagnétique.

## 2.2 Application aux ondes électromagnétiques

Le résultat de la partie précédente est résumé par la formule :

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \frac{d}{dt}(\mathbf{g} \cdot \mathbf{u}) = \nabla \cdot \mathbf{j}_P = 0 \quad (1)$$

avec  $\mathbf{j}_P = -\epsilon_0 \left( \frac{\mathbf{E}^2}{2} \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} \right) - \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{\mathbf{B}^2}{2} \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} \right)$  et  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{g}$  définis plus haut pour un vecteur constant  $\mathbf{u}$  quelconque.

On étudie une onde électromagnétique plane progressive se propageant dans le vide dans la direction de l'axe  $Ox$ . On s'intéresse uniquement à la quantité de mouvement selon  $Ox$ . Dans cette partie l'expression *quantité de mouvement* signifiera donc *projection sur  $Ox$  de la quantité de mouvement*.

### 2.2.1 Structure de l'onde

Rappeler l'expression du champ magnétique en fonction du champ électrique pris au même point au même instant.

### 2.2.2 Quantité de mouvement

Déterminer en fonction de  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{u}_x$  la densité volumique de quantité de mouvement  $\mathbf{g}$  ainsi que le vecteur densité de courant  $\mathbf{j}_P$  associé. Quel est le lien entre les deux ? Comment peut-on interpréter le résultat ?

### 2.2.3 Lien avec l'énergie électromagnétique

Quel est le vecteur densité de courant associé à l'énergie électromagnétique ? Quel lien présente-t-il ici avec  $\mathbf{j}_P$  ? Cela est-il en accord avec l'interprétation de la lumière en termes de photons ?

### 2.2.4 Pression de radiation, voile solaire

Au voisinage de l'orbite terrestre, la puissance du rayonnement solaire est de l'ordre de  $1550 \text{ W.m}^{-2}$ . En déduire la pression exercée sur une surface réfléchissante plane orientée vers le Soleil.

Un satellite déploie une voile solaire dont la masse surfacique est de  $10 \text{ g.m}^{-2}$ . Calculer le rapport entre la force de pression de radiation et l'attraction gravitationnelle qu'exerce le Soleil sur la voile. La navigation à voile solaire est-elle réaliste ? On donne :  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$  ;  $M_{\text{soleil}} = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$  ;  $d_{\text{terre-soleil}} = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$ .



## 2 Quantité de mouvement du champ électromagnétique

Cet exercice comporte deux parties dont la première vise à démontrer la formule générale donnée par l'équation 1 en section 2.2. La deuxième partie peut être traitée séparément.

On rappelle que pour une fonction scalaire  $s(\mathbf{r})$  et deux champs vectoriels  $\mathbf{v}(\mathbf{r})$  et  $\mathbf{w}(\mathbf{r})$  :

$$- \operatorname{div}(s\mathbf{v}) = \nabla \cdot (s\mathbf{v}) = (\nabla s) \cdot \mathbf{v} + s(\nabla \cdot \mathbf{v})$$

$$- \operatorname{grad}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) = \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{w}) + \mathbf{w} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{w} + (\mathbf{w} \cdot \nabla)\mathbf{v}$$

### 2.1 Étude générale

#### 2.1.1 Équation bilan d'une grandeur physique extensive

Une grandeur extensive  $A$  (telle que la masse ou l'énergie) vérifie les propriétés suivantes :

— elle est localisée : elle peut être décrite par une densité volumique  $a$  telle que la quantité de  $A$  dans un volume  $V$  peut s'écrire  $\iiint d^3r a = A$ ;

— elle peut être échangée entre différents systèmes séparés par une surface  $S$ . Le débit sortant de  $S$  associé à ce transfert s'écrit alors  $\oint \mathbf{j}_A \cdot d\mathbf{S}$  où  $\mathbf{j}_A$  est la densité de courant associée à  $A$ ;

— elle peut être créée dans le volume d'un système. Cette réaction étant décrite par le taux de création par unité de volume et de temps  $\alpha$  tel que, dans le volume  $V$ ,  $\frac{\delta A_{\text{creation}}}{\delta t} =$

$$\iiint_V \alpha d^3r.$$

En faisant le bilan de la grandeur  $A$ , démontrer l'équation-bilan locale reliant  $a$ ,  $\alpha$  et  $\nabla \cdot \mathbf{j}_A$ .

$$\frac{A}{\text{m}^3} \quad \vec{j}_A = a \times \vec{v}$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} = - \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_A + \alpha$$

#### 2.1.2 Quantité de mouvement du champ électromagnétique

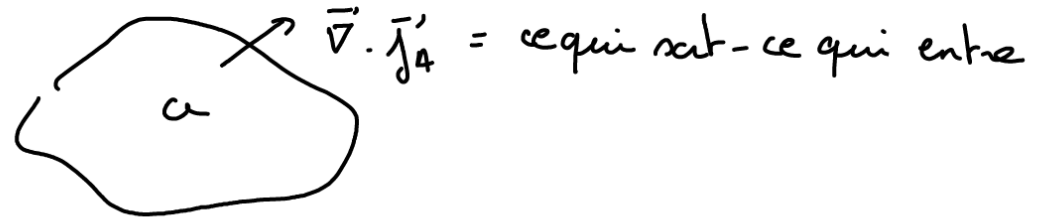
On se place maintenant en régime variable quelconque. On utilise les équations de Maxwell dans le vide en présence de charges et de courants décrits par des densités volumiques.

1. **Densité volumique de forces.** On étudie un volume élémentaire  $d\tau$  dans lequel existe une densité volumique de charges  $\rho$  et une densité volumique de courant  $\mathbf{j}$ . Calculer la force électromagnétique subie par ce volume  $d\tau$ . Exprimer la densité volumique de force  $\frac{d\mathbf{F}}{d\tau} = \mathbf{f}$  en fonction de  $\rho$ ,  $\mathbf{j}$ ,  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$ .

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint a dV = \iiint \alpha dV - \oint \vec{j}_A \cdot d\vec{S}'$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint a dV = \iiint \alpha dV - \iiint \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_A dV$$

$\alpha =$  densité volumique créée - densité volumique consommée / unité de temps



$$\frac{d\vec{F}}{d\tau} = \vec{f} = \frac{dq}{d\tau} (\vec{E}' + \vec{v}' \wedge \vec{B}')$$

$$\vec{f} = \rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}$$

2. **Equation bilan de quantité de mouvement.** A l'aide des équations de Maxwell, mettre l'expression  $\vec{Y} = \vec{f} + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{B})$  sous une forme où n'apparaissent que les champs  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  ainsi que certaines de leurs dérivées spatiales (mais pas leur dérivée temporelle).

$$\vec{Y} = \vec{f} + \frac{\partial}{\partial t} \underbrace{(\epsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{B})}_{\frac{kg}{m^2 s}}$$

$$\frac{kg}{m^2 s^2}$$

$$U = \frac{kg m^2}{s^2}$$

$$F = \frac{kg m}{s^2}$$

$$P = \frac{kg}{s^2 m}$$

$$\vec{p} = m \vec{v} = \frac{kg m}{s}$$

$$\vec{Y} = (\rho \vec{E} + \vec{j} \wedge \vec{B}) + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{B})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \end{array} \right.$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$= \epsilon_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \vec{E} + \left( \frac{\vec{\nabla} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \cdot \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \wedge \vec{B} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \wedge \vec{B} + \epsilon_0 \vec{E} \wedge \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$= \epsilon_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \vec{E} + \frac{(\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B}}{\mu_0} - \epsilon_0 \vec{E} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E})$$

$$= \epsilon_0 (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \vec{E} - \epsilon_0 \vec{E} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}) + \frac{1}{\mu_0} (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B}$$

3. On remarquera que l'expression de  $\mathbf{Y}$  comporte deux termes, l'un faisant intervenir uniquement  $\mathbf{E}$ , et l'autre  $\mathbf{B}$  uniquement. Soit  $\mathbf{u}$  un vecteur constant quelconque.  $\mathbf{Y} \cdot \mathbf{u}$  comporte donc également deux termes. Développer l'expression  $\nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{E}^2}{2} \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} \right)$  et la comparer avec le terme de  $\mathbf{Y} \cdot \mathbf{u}$  contenant  $\mathbf{E}$ . On utilisera la relation  $\mathbf{u} \cdot ((\mathbf{E} \cdot \nabla) \mathbf{E}) = \mathbf{E} \cdot (\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{E})) = \sum_{ij} E_i u_j \partial_i E_j$  (BONUS : la montrer).

$$\vec{\nabla}' \cdot \vec{u} \Big|_{\mathbf{E}} = \left[ \epsilon_0 (\vec{\nabla}' \cdot \vec{E}) \vec{E} - \epsilon_0 \vec{E}' \cdot (\vec{\nabla}' \vec{E}') \right] \cdot \vec{u}$$


---

$$\vec{\nabla}' \cdot \left( \frac{\mathbf{E}^2}{2} \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{E}') \vec{E}' \right) = \frac{1}{2} \vec{\nabla}' \cdot (\mathbf{E}^2 \vec{u}) - \vec{\nabla}' \cdot [(\vec{u} \cdot \vec{E}') \vec{E}']$$

$$= \frac{1}{2} \epsilon^2 \underbrace{\vec{\nabla}' \cdot \vec{u}}_0 + \frac{1}{2} (\vec{\nabla}' \mathbf{E}^2) \cdot \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{E}') (\vec{\nabla}' \cdot \vec{E}') - (\vec{E}' \cdot \vec{\nabla}') (\vec{u} \cdot \vec{E}') = \frac{1}{2} \vec{u} \cdot \vec{\nabla}' (\vec{E}' \cdot \vec{E}') - (\vec{u} \cdot \vec{E}') (\vec{\nabla}' \cdot \vec{E}') - (\vec{E}' \cdot \vec{\nabla}') (\vec{u} \cdot \vec{E}') - [(\vec{E}' \cdot \vec{\nabla}') \vec{E}'] \cdot \vec{u}$$

$$= \frac{1}{2} \vec{u} \cdot \left[ 2 \vec{E}' \cdot (\vec{\nabla}' \vec{E}') + 2 (\vec{E}' \cdot \vec{\nabla}') \vec{E}' \right] - (\vec{u} \cdot \vec{E}') (\vec{\nabla}' \cdot \vec{E}') - \vec{E}' \cdot \vec{\nabla}' (\vec{u} \cdot \vec{E}') - \vec{u} \cdot [(\vec{E}' \cdot \vec{\nabla}') \vec{E}']$$

$$= \vec{u} \cdot (\vec{E}' \cdot (\vec{\nabla}' \vec{E}')) + \vec{u} \cdot (\vec{E}' \cdot \vec{\nabla}') \vec{E}' - (\vec{u} \cdot \vec{E}') (\vec{\nabla}' \cdot \vec{E}') - \vec{E}' \cdot \vec{\nabla}' (\vec{u} \cdot \vec{E}')$$

$$\vec{\nabla}' \cdot \left( \frac{\mathbf{E}^2}{2} \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{E}') \vec{E}' \right) = \underline{\vec{u} \cdot (\vec{E}' \cdot (\vec{\nabla}' \vec{E}'))} - (\vec{\nabla}' \cdot \vec{E}') (\vec{E}' \cdot \vec{u}) = - \frac{1}{\epsilon_0} \vec{\nabla}' \cdot \vec{u} \Big|_{\mathbf{E}}$$

$$\underline{\vec{\nabla}' \cdot \left( \frac{\mathbf{E}^2}{2} \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{E}') \vec{E}' \right)} = - \frac{1}{\epsilon_0} \underline{\vec{\nabla}' \cdot \vec{u} \Big|_{\mathbf{E}}}$$

4. Sans calcul supplémentaire, justifier que  $\frac{1}{\mu_0} \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{B}^2}{2} \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} \right) = -\frac{1}{\mu_0} ((\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{u}$ .

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{u} &= \epsilon_0 \underbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) \vec{E} \cdot \vec{u} - \epsilon_0 \left[ \vec{E}' \cdot (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}') \right] \cdot \vec{u}}_{- \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \left[ \frac{E^2}{2} \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{E}) \vec{E} \right]} + \underbrace{\frac{1}{\mu_0} \left[ (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}') \vec{B}' \right] \cdot \vec{u}}_{- \frac{1}{\mu_0} \left[ \frac{B^2}{2} \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{B}') \vec{B}' \right]} \\ &= - \epsilon_0 \vec{\nabla} \cdot \left[ \frac{E^2}{2} \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{E}) \vec{E} \right] - \frac{1}{\mu_0} \left[ \frac{B^2}{2} \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{B}') \vec{B}' \right] \end{aligned}$$

5. Montrer alors que l'expression complète de  $\mathbf{Y} \cdot \mathbf{u}$  peut s'écrire sous la forme de la divergence d'un champ de vecteur.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = - \vec{\nabla} \cdot \left( \epsilon_0 \left[ \frac{E^2}{2} \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{E}) \vec{E} \right] + \frac{1}{\mu_0} \left[ \frac{B^2}{2} \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{B}') \vec{B}' \right] \right) = + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_P$$

$$\vec{j}_P = - \epsilon_0 \left[ \frac{E^2}{2} \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{E}) \vec{E} \right] - \frac{1}{\mu_0} \left[ \frac{B^2}{2} \vec{u} - (\vec{u} \cdot \vec{B}') \vec{B}' \right] \quad j_P \text{ en } \frac{J}{m^3} = \frac{\text{q}^{\text{te}} \text{ de mot} \times \text{vitesse}}{m^3}$$

6. Comment s'appelle ce champ de vecteur ?

→ tenseur des contraintes

$$\hookrightarrow \text{en } J/m^3 \equiv \left[ \frac{\text{q}^{\text{te}} \text{ de mot}}{m^3} \right] \times v = \vec{j}_P$$

→ courant de densité volumique  
de  $q^{\text{te}}$  de courant

7. **Interprétation.** En lien avec la question 2.1.1, déterminer les quantités  $a$ ,  $\alpha$  et  $\vec{j}_A$  considérées dans cette question.

$$\underline{\frac{\partial a}{\partial t} = - \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_A + \alpha}$$

$$\underline{\vec{\nabla}' \cdot \vec{u}' = \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \vec{u}' + \frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \vec{E}' + \vec{B}') \cdot \vec{u}'}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\epsilon_0 \vec{E}' + \vec{B}') \cdot \vec{u}' = \vec{\nabla}' \cdot \vec{u}' - \frac{\partial (f \cdot \vec{u}')}{\partial z} = - \vec{\nabla}' \cdot \vec{j}_A - \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \vec{u}'$$

$\vec{\pi} = \frac{d\vec{p}}{dz}$  = densité volumique de  $q^{te}$  de mot

↑ courant de densité volumique de  $q^{te}$  de mot

← densité volumique de  $q^{te}$  de mot créée / consommée par unité de tps

$$[\epsilon_0 \vec{E}' + \vec{B}'] = [\epsilon_0 \frac{E^2}{c}] = \frac{\text{Joule}}{m^3 \times \text{vitesse}} = \frac{q^{te} \text{ de mot}}{m^3} = \text{densité volumique de } q^{te} \text{ de mot}$$

$$\frac{df}{dz} = \frac{dp}{dt} \times \frac{1}{dz} = \frac{1}{dt} \frac{dp}{dz} = \frac{q^{te} \text{ de mot}}{\text{volume tps}}$$

$a = \epsilon_0 \vec{E}' + \vec{B}' = \text{densité volumique de } q^{te} \text{ de mot}$

$\vec{j}_A = \text{tenseur des contraintes} = \text{courant de } q^{te} \text{ de mot volumique} \left( \frac{kg \cdot m}{s} \times \frac{1}{m^2} \times \frac{1}{s} \right) = \frac{J}{m^3}$

$\alpha = \frac{df}{dz} = \text{création de } q^{te} \text{ de mot volumique / tps}$

8. Montrer alors que  $\mathbf{g} = \epsilon_0 \mathbf{E} \times \mathbf{B}$  peut s'interpréter comme une densité volumique de quantité de mouvement associée au champ électromagnétique.

$$\mathbf{g} = \epsilon_0 \vec{E} \wedge \vec{B} \quad [\mathbf{g}] = \frac{\text{J}}{\text{m}^3} \times \frac{1}{\text{vitesse}} = \frac{\text{qte de mot} \times \text{vitesse}}{\text{m}^3} \times \frac{1}{\text{vitesse}} = \underline{\underline{\frac{\text{qte de mot}}{\text{m}^3}}}$$

$$\propto \epsilon_0 \frac{E^2}{c}$$

## 2.2 Application aux ondes électromagnétiques

Le résultat de la partie précédente est résumé par la formule :

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \frac{d}{dt}(\mathbf{g} \cdot \mathbf{u}) + \nabla \cdot \mathbf{j}_P = 0 \quad (1)$$

avec  $\mathbf{j}_P = -\epsilon_0 \left( \frac{\mathbf{E}^2}{2} \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} \right) - \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{\mathbf{B}^2}{2} \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} \right)$  et  $\mathbf{f}$  et  $\mathbf{g}$  définis plus haut pour un vecteur constant  $\mathbf{u}$  quelconque.

On étudie une onde électromagnétique plane progressive se propageant dans le vide dans la direction de l'axe  $Ox$ . On s'intéresse uniquement à la quantité de mouvement selon  $Ox$ . Dans cette partie l'expression *quantité de mouvement* signifiera donc *projection sur  $Ox$  de la quantité de mouvement*.

### 2.2.1 Structure de l'onde

Rappeler l'expression du champ magnétique en fonction du champ électrique pris au même point au même instant.

$$\frac{d}{dt} (\bar{g} \cdot \bar{u}) = \bar{\nabla} \cdot \bar{j}_P - \frac{\partial \bar{f} \cdot \bar{u}}{\partial t}$$

$$\underline{\underline{\bar{B} = \frac{\bar{u} \wedge \bar{E}}{c}}}$$

### 2.2.2 Quantité de mouvement

Déterminer en fonction de  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{u}_x$  la densité volumique de quantité de mouvement  $\mathbf{g}$  ainsi que le vecteur densité de courant  $\mathbf{j}_P$  associé. Quel est le lien entre les deux? Comment peut-on interpréter le résultat?

$$\vec{g}' = \epsilon_0 (\vec{E} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{u}_x = \frac{\epsilon_0}{c} (\vec{E}' \wedge (\vec{u}_x \wedge \vec{E}')) \cdot \vec{u}_x$$

$$\vec{g}' = \frac{\epsilon_0}{c} (E^2 + (\vec{E}' \cdot \vec{u}_x) \vec{E}' \cdot \vec{u}_x) = \frac{\epsilon_0 E^2}{c}$$

$$\vec{j}_P = -\epsilon_0 \left( \frac{E^2}{2} \vec{u}_x - \underbrace{(\vec{u}_x \cdot \vec{E}) \vec{E}}_0 \right) - \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{B^2}{2} \vec{u}_x - \underbrace{(\vec{u}_x \cdot \vec{B}) \vec{B}}_0 \right)$$

$$\vec{j}_P = -\epsilon_0 \frac{E^2}{2} \vec{u}_x - \frac{B^2}{2\mu_0} \vec{u}_x = \epsilon_0 E^2 \vec{u}_x$$

$$\vec{j}_P = \mathbf{g} \times \vec{c}$$

vitesse de propagation de la q<sup>te</sup> de mot

### 2.2.3 Lien avec l'énergie électromagnétique

Quel est le vecteur densité de courant associé à l'énergie électromagnétique? Quel lien présente-t-il ici avec  $\mathbf{j}_P$ ? Cela est-il en accord avec l'interprétation de la lumière en termes de photons?

$$\vec{j}_u = \vec{R} = \frac{\vec{E}' \wedge \vec{B}'}{\mu_0} = \frac{E^2}{\mu_0 c} \vec{u}_x = c \epsilon_0 E^2 \vec{u}_x = c \vec{j}_P$$

$$\vec{j}_u = c \vec{j}_P$$

pour les photons  $E = pc$



## 2.2.4 Pression de radiation, voile solaire

Au voisinage de l'orbite terrestre, la puissance du rayonnement solaire est de l'ordre de  $1550 \text{ W.m}^{-2}$ . En déduire la pression exercée sur une surface réfléchissante plane orientée vers le Soleil.

Un satellite déploie une voile solaire dont la masse surfacique est de  $10 \text{ g.m}^{-2}$ . Calculer le rapport entre la force de pression de radiation et l'attraction gravitationnelle qu'exerce le Soleil sur la voile. La navigation à voile solaire est-elle réaliste ? On donne :  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$ ;  $M_{\text{soleil}} = 1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ ;  $d_{\text{terre-soleil}} = 1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$ .

2.2.4.1 ) Les deux valeurs  $j_p^+$  et  $j_p^-$  sont égales à  $\epsilon_0 E^2 \cdot u_x$   
 $j_p^+$  amène des photons de QDM positive alors que  
 $j_p^-$  enlève des photons de QDM négative

2.2.4.2 ) En régime périodique la valeur moyenne d'une dérivée est nulle

2.2.4.3 ) on intègre l'équation (1) sur le sujet dans le temps sur une période et dans l'espace sur le volume proposé.  
 Le flux de  $j_p$  sur la surface de gauche vaut  $-2 \epsilon_0 E^2 S$   
 Le flux à droite vaut zéro car il n'y a pas de champ transmis.  
 Le flux sur les côtés tend vers zéro lorsque  $h$  tend vers zéro.

On obtient donc que la force par unité de surface vaut  $P = \epsilon_0 E_0^2$  soit :

$$\underline{P \text{ (Pa)} = \frac{P}{S}}$$

avec  $P$ (rond) la puissance lumineuse =  $\langle R \rangle$

$$P_{\text{grav}} = \frac{dF}{ds} = G \frac{m \pi s}{d^2} = 6,67 \cdot 10^{-11} \times \frac{10 \cdot 10^{-3} \times 1,99 \cdot 10^{30}}{(1,5 \cdot 10^{11})^2} = \underline{5,89 \cdot 10^{-5} \text{ N}}$$

$$\frac{P_{\text{Pa}}}{P_{\text{grav}}} = \frac{P}{\epsilon P_{\text{grav}}} = \frac{1550}{3 \cdot 10^8 \times 5,89 \cdot 10^{-5}} = 0,087 = \underline{8,7\%}$$

non négligeable mais peu réaliste