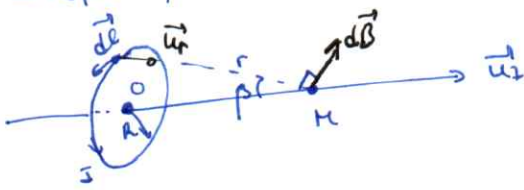


# EXERCICE 2 - Bobine de Helmholtz

## 2.1.1 B spire magnétique

2.1.1.

$\vec{B}$  spire par loi de Biot et Savart.



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot d\vec{l} \wedge \vec{ur}}{r^2}$$

par symétrie  $\rightarrow$  seule la composante relative  $\vec{u}_z$  reste.

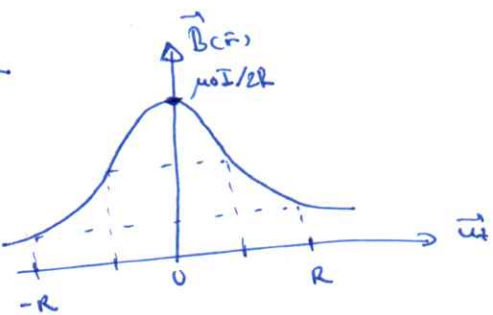
$$dB_z = \frac{\mu_0 \cdot I}{4\pi} \cdot \frac{dl \cdot \sin\theta}{r^2}$$

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{\sin\theta}{r^2} \cdot \oint dl = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \cdot \frac{\sin\theta}{r^2} \cdot 2\pi R$$

$$+ \sin\theta = \frac{R}{r} = \frac{R}{\sqrt{R^2+z^2}}$$

$$\vec{B}_z(M) = \frac{\mu_0 I}{2} \cdot \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}} \vec{u}_z$$

2.1.2.



$B_z$  paire en  $\vec{u}_z$   
 $B_z$  max en  $z=0$ ;  $B_{max} = \frac{\mu_0 I}{2R}$

$B_z(z = \pm R/2)$  ?

$$\frac{dB_z}{dz} = -\frac{3}{2} \cdot \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2+z^2)^{5/2}} \cdot 2z$$

$$\frac{d^2 B_z}{dz^2} = -\frac{3\mu_0 I R^2}{2} \cdot \left[ (R^2+z^2)^{-5/2} - \frac{5}{2} \cdot z \cdot 2z \cdot (R^2+z^2)^{-7/2} \right] =$$

$$= -\frac{3\mu_0 I R^2}{2} (R^2+z^2)^{-5/2} \cdot \left[ 1 - \frac{5z^2}{R^2+z^2} \right]_{z=\pm R/2} = 0$$

$\Rightarrow z = \pm R/2$  point d'inflexion

2.1.3.

N spires pointues

$B_{spire} \rightarrow N \cdot B_{spire} \rightarrow NI \Rightarrow$

$$\vec{B}_z(z) = \frac{\mu_0 \cdot NI}{2} \cdot \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}} \vec{u}_z$$

2.1.4.

Maxwell - Faraday  $\nabla \cdot \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \rightarrow \int \nabla \cdot \vec{E} dS = \int -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dS$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

sachant que  $\int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \Phi_{mag}$

- w due au  $\vec{E}$  et par  $\vec{B} \Rightarrow$  f.e.m.  $V_e = \frac{W}{q} = \frac{1}{q} \oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$

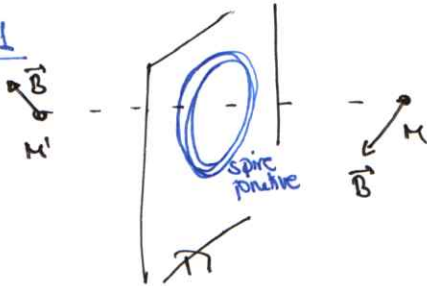
on déduit  $V_e = -\frac{d}{dt} \cdot \Phi_{mag}$

$$\Phi_{spire} = \vec{B} \cdot \vec{S}_{spire} = B \cdot S_{spire} \cdot \cos \Theta$$

$$\Phi_{bobine} = N \cdot \Phi_{spire}$$

2.2. Champ magnétique de la bobine de Helmholtz

2.2.1



plan  $\Pi \rightarrow$  plan de symétrie de la distribution de courant

$$B_z(r, z) = B_z(r, -z) \Rightarrow \vec{B}_z \text{ continue}$$

$$B_r(r, z) = -B_r(r, -z) \Rightarrow \vec{B}_{||} \text{ change signe}$$

$\rightarrow$  système de coordonnées : cylindrique

$$\vec{B} = B_r(r, z) \vec{u}_r + B_z(r, z) \vec{u}_z$$

$\rightarrow B_r$  impaire en  $z$   
 $B_z$  paire en  $z$

$\nabla$  invariant par rotation d'angle  $\Theta$  dans le plan  $\vec{u}_r, \vec{u}_z$

2.2.2

au voisinage de  $O_i \Rightarrow z, r$  petits par rapport  $d$  et  $R$  et  $d \gg R$

( $d$  distance au point  $M$ )  
 $R \rightarrow$  rayon

$$B_r(r, z) = D \cdot z$$

$$B_z(r, z) = B_z(0,0) + A \cdot r + B \cdot r^2 + C \cdot z^2$$

Démo: Développement limité à l'ordre 2:

1)  $B_r$

i)  $B_r(0,0) = 0$

ii)  $B_r(r,z) = -B_r(r,-z) \rightarrow$  impaire  $\Rightarrow \partial z^1 = 0 \Rightarrow \alpha \cdot r + \beta \cdot r^2 + \gamma \cdot z + \eta \cdot r z = -\alpha \cdot r - \beta \cdot r^2 + \gamma \cdot z + \eta \cdot r z$

iii)  $B_r(r,z) = D \cdot r \cdot z$

$\Rightarrow \alpha = \beta = 0.$

$\oplus B_r(0,z) = 0 = \gamma \cdot z \Rightarrow \gamma = 0$

$\Downarrow$

$B_r(r,z) = \eta \cdot r \cdot z.$

2)  $B_z$

i)  $B_z(r \rightarrow 0, z \rightarrow 0) \simeq B_z(0,0) + \left. \frac{\partial B_z}{\partial r} \right|_{\substack{r=0 \\ z=0}} \cdot r + \left. \frac{\partial B_z}{\partial z} \right|_{\substack{r=0 \\ z=0}} \cdot z +$

$+ \left. \frac{\partial^2 B_z}{\partial r^2} \right|_{\substack{r=0 \\ z=0}} \frac{r^2}{2!} + \left. \frac{\partial^2 B_z}{\partial z^2} \right|_{\substack{r=0 \\ z=0}} \frac{z^2}{2!}$

$+ \left. \frac{\partial^2 B_z}{\partial r \cdot \partial z} \right|_{\substack{r=0 \\ z=0}} \cdot r \cdot z + O(r^3, z^3)$

$B_z(r,z) = B_z(0,0) + \alpha' \cdot r + \beta' \cdot r^2 + \gamma' \cdot z + \delta' \cdot z^2 + \eta' \cdot r \cdot z + O(r^3, z^3)$

ii)  $B_z(r,z) = B_z(r,-z) \Rightarrow$  termes impaires en  $z$  s'annulent

iii)  $B_z(r,z) = B_z(0,0) + A \cdot r + B \cdot r^2 + C \cdot z^2$

Calcul de préfacteurs:

$\vec{D} \cdot \vec{B} = 0$  et  $\vec{D} \wedge \vec{B} = 0$ , car pas de  $\vec{j}$  ni  $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$  autour du point  $O_i$ .

$\vec{D} \cdot \vec{B} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} (r B_r) + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$

$\frac{1}{r} \cdot 2 D r \cdot z + 2 C z = 0 \Rightarrow \boxed{D = -C}$

$\vec{D} \wedge \vec{B} = \frac{\partial B_r}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial r} = 0$

$D \cdot r - A - 2 B \cdot r = 0 \Rightarrow \boxed{A = 0, D = 2B = -C}$

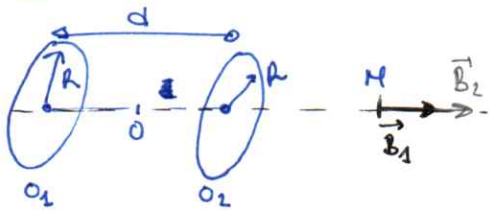
pour moi jusqu'ici est 100% après esp de calcul qui apporte par grande chose

ou soit  $B_z(0,t) = B_z(0,0) + C z^2$

$\vec{B}_{\text{spire}} \text{ en } H \text{ axe } \vec{u}_z = \frac{\mu_0 N I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{u}_z$

$B_z(0,t) = \frac{\mu_0 N I}{2} \cdot (f(z) + f(-z))$

2.2.3



I même sens  $\Rightarrow \vec{B}_1 + \vec{B}_2$  ne s'annulent.

$$\vec{B}_{\text{spire}} = \frac{\mu_0 \cdot N I}{2} \cdot \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

avec  $z'_1 = z + \frac{d}{2}$

$z'_2 = z - \frac{d}{2} \equiv \frac{d}{2} - z$  car  $f(z^2)$

$$\vec{B}_{\text{total}}(z) = \vec{B}_1(z) + \vec{B}_2(z) =$$

$$= \frac{\mu_0 \cdot N \cdot I}{2} \cdot R^2 \cdot \left[ \frac{1}{\left[R^2 + \left(z + \frac{d}{2}\right)^2\right]^{3/2}} + \frac{1}{\left[R^2 + \left(\frac{d}{2} - z\right)^2\right]^{3/2}} \right] \vec{u}_z$$

2.2.4

in  $d = R$

$\vec{B}_{\text{total}}$  pair-impaire  $\Rightarrow \frac{\partial B_{\text{total}}}{\partial z} = 0$  aux q'ordres impaires.  
jusqu'à quel ordre ?

1)  $B_z(r, z) = B_z(r, z) \Rightarrow$  termes impaires en  $z$  s'annulent

$\Downarrow$

$$B_z(r, z) = B(0,0) + \cancel{a z} + \cancel{b z^2} + \cancel{c z^3} + d z^4 + \dots$$

l'axe  $\Rightarrow r=0$

De plus, on sait  $B_z(z = \pm R/2)$  point d'inflexion  $\Rightarrow b z^2|_{d=R} = 0$ .

$\Rightarrow$  1<sup>er</sup> terme non nul  $\Rightarrow B_z(r, z) = d z^4$   
sur l'axe

autrement :  $\vec{B}_{\text{total}} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0 \cdot N I}{2} R^2 \cdot \left[ f\left(\frac{R}{2} + z\right) + f\left(\frac{R}{2} - z\right) \right]$  et  $f(z) = \frac{1}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$

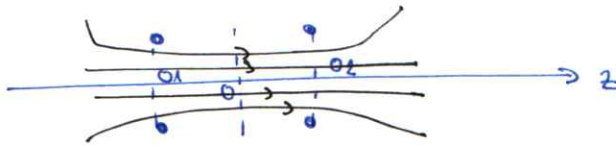
on effectue le développement limité par  $z$  petit

$$f\left(\frac{R}{2} \pm z\right) = f\left(\frac{R}{2}\right) \pm z \cdot \frac{\partial f}{\partial z} \Big|_{R/2} + \frac{1}{2!} z^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \Big|_{R/2} \pm \frac{1}{3!} z^3 \cdot \frac{\partial^3 f}{\partial z^3} \Big|_{R/2} + \dots$$

$$\vec{B}_{\text{total}} = \frac{\mu_0 \cdot N I}{2} \cdot R^2 \cdot \left[ \underbrace{2 f(R/2)}_{cte} + \underbrace{z^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \Big|_{R/2}}_0 + \underbrace{O z^4}_{\substack{\uparrow \text{modifications induites} \\ \text{au quatrième ordre.}}} \right]$$



2.2.5

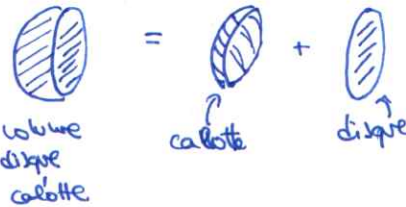


2.3. Fluxmètre à Bobine de Helmholtz

2.3.1.  $\text{div } \vec{B} = 0$   
 $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$

$S = S_1 + S_2$   
 $\Rightarrow \int_{S_1} \vec{B} \cdot d\vec{S}_1 + \int_{S_2} \vec{B} \cdot d\vec{S}_2 = 0$

ainsi



$\Rightarrow$  on peut conclure

$\oint_{\text{calotte} + \text{cerce/disque}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{\text{calotte}} \vec{B} \cdot d\vec{S} + \int_{\text{cerce au disque}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$

$\Rightarrow \boxed{\Phi_{\text{disque}} = \Phi_{\text{calotte}}}$

2.3.2

$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{3(\vec{m} \cdot \vec{ur}) \cdot \vec{ur} - \vec{m}}{r^3}$

$\vec{m} = m \vec{u}_z$  et placé en (0,0,0)  
 coordonnées sphériques

$\vec{m} \cdot \vec{ur}$



$\boxed{\vec{B}(r, \theta, \phi) = \frac{\mu_0 \cdot m}{4\pi r^3} \cdot (2 \cos \theta \vec{ur}, \sin \theta \vec{u}_\theta, 0)}$

2.3.3

$\Phi_{\text{mag}}$  généré par  $\vec{B}_{\text{dipole}} / \Phi_{\text{mag}} = \Phi_{\text{mag}}(R, \vec{m})$

$\Phi_{\text{mag}} \text{ bobine Helmholtz} = \Phi_{\text{mag}} S_1 + \Phi_{\text{mag}} S_2$

(intégration sur les deux calottes)  
 [en  $o_1$  et  $o_2$ ]

$$\vec{\Phi}_{\text{Helmholtz}} = \left\{ \int_{\theta=0}^{\theta_0} \int_{\phi=0}^{2\pi} B \cdot r^2 \cdot \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, \vec{u}_r + \int_{\theta=\pi-\theta_0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} B \cdot r^2 \cdot \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, \vec{u}_r \right\} \times N_{\text{spire}}$$

intégration à  $R = \text{cte}$

$$= \frac{\mu_0 \cdot M N}{r} \left\{ \int_{\theta=0}^{\theta_0} \cos\theta \cdot \sin\theta \, d\theta + \int_{\theta=\pi-\theta_0}^{\pi} \cos\theta \cdot \sin\theta \, d\theta \right\} =$$

$$= \frac{2\mu_0 \cdot M N}{r} \int_{\theta=0}^{\theta_0} \cos\theta \sin\theta \, d\theta = \frac{2\mu_0 M}{r} \left[ -\frac{\cos^2\theta}{2} \right]_0^{\theta_0} =$$

$$= \frac{\mu_0 \cdot M N}{r} \cdot [1 - \cos^2\theta_0] = \dots = \frac{\delta \mu_0 M \cdot N}{r \cdot \sqrt{r} \cdot R}$$

$\cos\theta_0 = \frac{R/2}{\sqrt{R} \cdot R}$  erreur!  $\sqrt{r} \cdot R$

$\vec{u}_r$  remplacé par  aimant  $60 \times 20 \times 5 \text{ mm}^3$  de  $M_{\text{Mn}}$  selon  $\vec{u}_z$  (homogène)

2.3.4  $\vec{B}_{\text{total}}$  selon axe  $x$   $Oz^4 \Rightarrow$  modifications autour des valeurs en  $z=0$  petits ve refluent par  $\Phi_{\text{mag}} = \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$

De plus  $B_r(r, z) = D \cdot r \cdot z$  par  $r=0 \equiv (x, y) = (0, 0) \left. \begin{array}{l} B_r \rightarrow 0 \\ z=0 \end{array} \right\}$

$$\bullet B_z(r, z) = B_z(0, 0) + \frac{D}{2} r^2 + O z^4$$

si  $r \rightarrow 0 \Rightarrow B_z(0, 0) \rightarrow \text{cte}$

$\Rightarrow$  en conclusion  $O(0, 0, 0)$  en ~~autres~~ positions autour de ce point donnent valeurs identiques de  $\vec{B} \Rightarrow \Phi_{\text{mag}}$  ve se voit pas modifier.

2.3.5. i)  $\vec{u}_{\text{total aimant}} = \vec{M}_r \cdot V$  avec  $V$  volume de l'aimant

ii)  $\vec{B}_{\text{total aimant}} = \mu_0 \cdot \vec{M}_r$

iii)  $\Phi_{\text{mag}} = \frac{\delta \mu_0 \cdot \vec{u}_{\text{total aimant}} \cdot N}{r \cdot \sqrt{r} \cdot R}$   $\vec{u}_{\text{total aimant}} = \vec{M}_r \cdot V = \frac{\vec{B}_{\text{total aimant}}}{\mu_0} \cdot V$

$$= \frac{\delta}{r \cdot \sqrt{r}} \cdot \frac{V \cdot N}{R} \cdot \vec{B}_{\text{total aimant}}$$

À  $t=0$  aimant  $O(0,0)$  avec  ~~$\vec{M}$~~   $\vec{M}_{aimant} = M_r \vec{u}_z$   
à  $t > 0 \Rightarrow$  aimant éloigné du dispositif  $\Rightarrow \Delta \Phi_{mag}$  dans la bobine de Helmholtz

2.3.6.

$$V_e = - \frac{d\Phi_{mag}}{dt} \quad (\text{voir 2.1.4.})$$

$$\int V_e(t) dt = -\Phi_{mag}|_{final} + \Phi_{mag}|_{initial} \quad \text{avec } \Phi_{mag} \propto N B \cdot S \cdot \cos \theta$$

aimant éloigné  $\Rightarrow$   $\vec{B}_{aimant}$  dans la bobine de Helmholtz  $= 0. \Rightarrow \Phi_{mag}|_{final} = 0.$

$$\Rightarrow \boxed{\Phi_{mag}|_{initial} = + \int V_e(t) dt.}$$

$\int V_e(t) dt$  dépend donc uniquement de  $\Phi_{mag}|_{initial}$  et donc par la vitesse  $v$  de la direction du déplacement de l'aimant.

2.3.7.

Helmholtz  $\rightarrow$  2 bobines de 98 spires chacune et  $R = 6,15 \text{ cm}$   
aimant  $\rightarrow 60 \times 20 \times 5 \text{ mm}^3$



$$\Rightarrow \boxed{\Phi_{mag}|_{initial} = 100 \cdot 10^{-3} \cdot 50 \cdot 10^{-6} = 5 \cdot 10^{-3} \frac{\text{V} \cdot \text{s}}{\text{Wb.}}}$$

$$\begin{aligned} \Phi_{mag} &= \frac{\mu_0 \cdot N^2}{8 \cdot r \cdot R} \parallel \mu_{rot} \parallel \rightarrow \boxed{\mu_{rot} = \frac{5 \cdot 10^{-3} \cdot 6,15 \cdot 10^{-2}}{8 \cdot \mu_0 \cdot 96} \cdot 5 \cdot 10^{-3}} \\ &= 3,77 \frac{\text{A} \cdot \text{m}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^3 \text{T}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |\vec{m}| = M_r \cdot V \Rightarrow \boxed{M_r = \frac{|\vec{m}|}{V} = 6,13 \cdot 10^5 \frac{\text{A} \cdot \text{m}^2}{\text{m}^3}}$$

$$\Rightarrow B_r = \mu_0 \cdot M_r \Rightarrow \boxed{B_r = 0,79 \text{ T}}$$

} par demandé.