R5.04 Traitement numérique des données
TD1 : Programmation linéaire : correction

1 FLEXIBOX, FABRIQUANT DE CARTONS

L'entreprise FlexiBox dispose de 10 000 m² de carton en réserve, et fabrique 2 types de boîtes en carton. La fabrication d'une boîte en carton de type 1 ou 2 requiert, respectivement, 1 et 2 m² de carton ainsi que 2 et 3 minutes de temps d'assemblage. Seules 200 heures de travail sont disponibles pendant la semaine à venir. Les boîtes sont agrafées et il faut quatre fois plus d'agrafes pour une boîte du second type que pour une du premier. Le stock d'agrafes disponible permet d'assembler au maximum 15 000 boîtes du premier type. Les boîtes sont vendues, respectivement, 3 € et 5 €.

a) **Modélisation** : Formulez le problème de la recherche d'un plan de production maximisant le chiffre d'affaires de l'entreprise, sous forme d'un programme linéaire. Préciser clairement les variables de décision, les contraintes et la fonction économique.

Variables :

x_1 : nombre de boîtes de type 1 à fabriquer

x_2 : nombre de boîtes de type 2 à fabriquer

Contraintes :

$C_1 :\ x_1 + 2x_2 \leq 10000$ (m² de carton disponibles)

$C_2 :\ 2x_1 + 3x_2 \leq 12000$ (temps de travail disponible)

$C_3 :\ x_1 + 4x_2 \leq 15000$ (stock d'agrafes)

$C_4 :\ x_1, x_2 \geq 0$ (quantités de production non négatives)

Fonction économique :

$Z = 3x_1 + 5x_2$ [à maximiser]

b) **Résolution** : Déterminez un plan de production optimal en résolvant graphiquement le programme linéaire trouvé.

Pour la résolution graphique, on va travailler sur le plan x_1-x_2 .

Contrainte C_1 :

- On trace la ligne avec équation $x_1 + 2x_2 = 10000$. Pour cela :
  - On pose $x_1 = 0$, ce qui donne $0 + 2x_2 = 10000 \Leftrightarrow x_2 = 5000$. Premier point : $(0, 5000)$.
  - On pose $x_2 = 0$, ce qui donne $x_1 + 2 \cdot 0 = 10000 \Leftrightarrow x_1 = 10000$. Deuxième point : $(10000, 0)$.
- On trace la ligne dans le diagramme, et on constate qu'elle ne passe pas par le point $(0, 0)$. On teste donc si le point $(0, 0)$ vérifie la contrainte. On remplace $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ dans l'inéquation C_1 : $0 + 2 \cdot 0 \leq 10000 \Leftrightarrow 0 \leq 10000$, vérifié. On élimine donc le demi-plan qui ne contient pas le point (hachuré dans le diagramme).

Contrainte C_2 :

- On trace la ligne avec équation $2x_1 + 3x_2 = 12000$. Pour cela :
  - On pose $x_1 = 0$, ce qui donne $2 \cdot 0 + 3x_2 = 12000 \Leftrightarrow x_2 = 4000$. Premier point : $(0, 4000)$.
  - On pose $x_2 = 0$, ce qui donne $2x_1 + 3 \cdot 0 = 12000 \Leftrightarrow x_1 = 6000$. Deuxième point : $(6000, 0)$.

- On trace la ligne dans le diagramme, et on constate qu'elle ne passe pas par le point $(0,0)$. On teste donc si le point $(0,0)$ vérifie la contrainte. On remplace $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ dans l'inéquation C_2 : $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 \leq 12000 \Leftrightarrow 0 \leq 12000$, vérifié. On élimine donc le demi-plan qui ne contient pas le point (hachuré dans le diagramme).

<u>Contrainte C_3 :</u>

- On trace la ligne avec équation $x_1 + 4x_2 = 15000$. Pour cela :
    - On pose $x_1 = 0$, ce qui donne $0 + 4x_2 = 15000 \Leftrightarrow x_2 = 3750$. Premier point : $(0,3750)$.
    - On pose $x_2 = 0$, ce qui donne $x_1 + 4 \cdot 0 = 15000 \Leftrightarrow x_1 = 15000$. Deuxième point : $(15000,0)$.
- On trace la ligne dans le diagramme, et on constate qu'elle ne passe pas par le point $(0,0)$. On teste donc si le point $(0,0)$ vérifie la contrainte. On remplace $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ dans l'inéquation C_3 : $0 + 4 \cdot 0 \leq 15000 \Leftrightarrow 0 \leq 15000$, vérifié. On élimine donc le demi-plan qui ne contient pas le point (hachuré dans le diagramme).

<u>Contrainte C_4 :</u>

Ces contraintes ayant une forme simple, on retient directement la partie du plan qui correspond aux valeurs positives de x_1, x_2 (premier quadrant).

Le domaine réalisable est ainsi délimité par les lignes rouges dans le diagramme.

<u>Fonction économique :</u>

On va tracer les lignes droites qui correspondent à deux valeurs de la fonction économique. On choisit $Z = 0$ et $Z = 7500$.

- Pour tracer $Z = 0 \Leftrightarrow 3x_1 + 5x_2 = 0$:
    - On pose $x_1 = 0$, ce qui donne $3 \cdot 0 + 5x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 0$. Premier point : $(0,0)$.
    - On pose $x_1 = 1000$, ce qui donne $3 \cdot 1000 + 5x_2 = 0 \Leftrightarrow x_2 = -600$. Deuxième point : $(1000,-600)$.
- Pour tracer $Z = 7500 \Leftrightarrow 3x_1 + 5x_2 = 7500$:
    - On pose $x_1 = 0$, ce qui donne $3 \cdot 0 + 5x_2 = 7500 \Leftrightarrow x_2 = 1500$. Premier point : $(0,1500)$.
    - On pose $x_2 = 0$, ce qui donne $3x_1 + 5 \cdot 0 = 7500 \Leftrightarrow x_1 = 2500$. Deuxième point : $(2500,0)$.

On indique la direction de croissance de Z par une flèche verte sur le diagramme.

<u>Solution optimale :</u>

A l'aide d'une règle, on détermine que la solution optimale est le point d'intersection des lignes droites qui correspondent aux contraintes C_2 et C_3. Pour calculer les coordonnées de ce point, on résout le système linéaire qui découle de ces contraintes en changeant les inégalités en égalités :

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 12000 \\ x_1 + 4x_2 = 15000 \end{cases}$$

La deuxième équation nous permet d'exprimer x_1 en termes de x_2 :

$$x_1 = 15000 - 4x_2$$

En remplaçant x_1 dans la première équation, on obtient :

$$2 \cdot (15000 - 4x_2) + 3x_2 = 12000$$

$$30000 - 8x_2 + 3x_2 = 12000$$

$$30000 - 5x_2 = 12000$$

$$-5x_2 = 12000 - 30000$$

$$-5x_2 = -18000$$

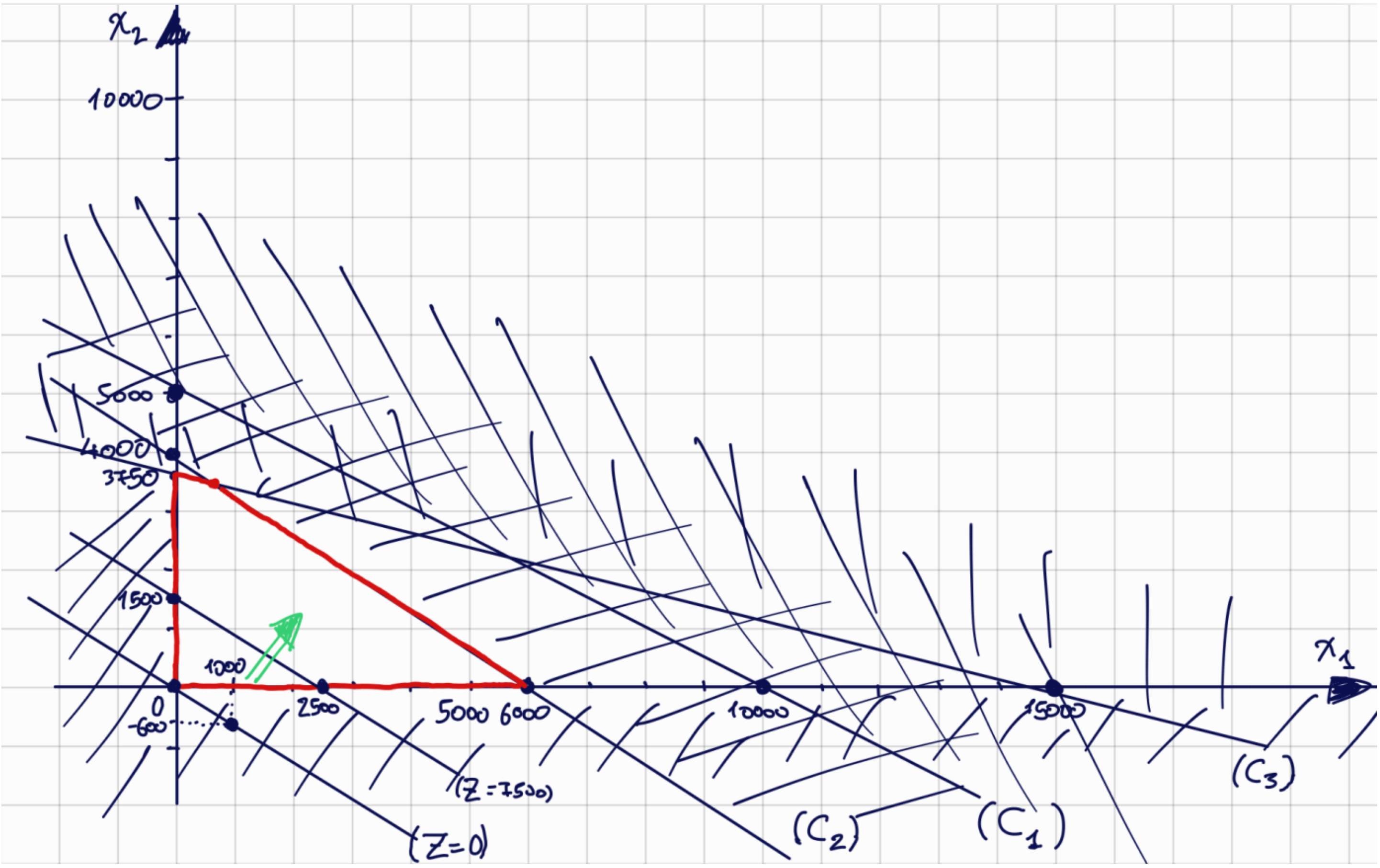
$$x_2 = \frac{-18000}{-5} = 3600$$

En remplaçant cette valeur dans l'expression de x_1 :

$$x_1 = 15000 - 4x_2 = 15000 - 4 \cdot 3600 = 600$$

Le plan de production optimal est donc $x_1 = 600$, $x_2 = 3600$. Le chiffre d'affaires optimal est :

$$Z = 3x_1 + 5x_2 = 3 \cdot 600 + 5 \cdot 3600 = 19800$$



2 FRESHPACK, EMBALLAGE DE VIANDES

L'usine d'emballage de viande FreshPack produit 480 unités de jambons, 400 unités de poitrines de porcs et 230 unités de lardons chaque jour. Chacun de ces produits peut être vendu frais ou fumé. Le nombre total d'unités de produits pouvant être fumées au cours d'une journée normale de travail est de 420. De plus, 250 unités de produits supplémentaires peuvent être fumées au cours d'heures supplémentaires pour un coût plus élevé. Les bénéfices nets par unité produite sont les suivants :

	Frais	**Fumé en h. normales**	**Fumé en h. sup**
Jambons	8 €	14 €	11 €
Poitrines	4 €	12 €	7 €
Lardons	4 €	13 €	9 €

On veut trouver la planification qui maximise le bénéfice total net. Modélisez le problème sous forme d'un programme linéaire, en indiquant clairement les variables de décision, les contraintes et la fonction économique.

Variables :

x_1 : unités de jambons frais

x_2 : unités de jambons fumées en heures normales

x_3 : unités de jambons fumées en heures supplémentaires

y_1 : unités de poitrines frais

y_2 : unités de poitrines fumées en heures normales

y_3 : unités de poitrines fumées en heures supplémentaires

z_1 : unités de lardons frais

z_2 : unités de lardons fumées en heures normales

z_3 : unités de lardons fumées en heures supplémentaires

Contraintes :

$C_1 : \; x_1 + x_2 + x_3 \leq 480$ (unités de jambons)

$C_2 : \; y_1 + y_2 + y_3 \leq 400$ (unités de poitrines)

$C_3 : \; z_1 + z_2 + z_3 \leq 230$ (unités de lardons)

$C_4 : \; x_2 + y_2 + z_2 \leq 420$ (unités fumées en heures normales)

$C_5 : \; x_3 + y_3 + z_3 \leq 250$ (unités fumées en heures supplémentaires)

$C_6 : \; x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3 \geq 0$ (quantités de production non négatives)

Fonction économique :

$Z = 8x_1 + 14x_2 + 11x_3 + 4y_1 + 12y_2 + 7y_3 + 4z_1 + 13z_2 + 9z_3$ [à maximiser]