R5.04 Traitement numérique des données
TD2 : Programmation linéaire

1 GENCO, FABRIQUANT D'APPAREILS ELECTROMENAGERS

L'entreprise Genco fabrique divers modèles d'appareils électroménagers. À la suite d'une réunion départementale de divers chefs de services de l'entreprise, il a été convenu d'examiner la possibilité de modifier le programme de fabrication des grille-pains, qui prévoit actuellement la fabrication de 600 unités de son modèle électronique (QL-500), et de 200 unités de son modèle grille-pain/four (QL-700X).

L'assemblage se fait en deux phases et, par la suite, une vérification (contrôle exhaustif) est effectuée sur toutes les unités. Le tableau suivant donne l'information concernant le nombre d'heures exigées pour fabriquer une unité de chaque modèle, ainsi que les disponibilités en heures de chaque département.

	Modèles (Nombres d'heures requises par unité)		
Départements	**QL-500**	**QL-700X**	**Heures disponibles**
Assemblage (phase 1)	*Somme des deux derniers chiffres de votre N° étudiant*	4	4200
Assemblage (phase 2)	1	3	2250
Vérification	2	2	2600

Etant donné la situation du marché, l'entreprise ne veut pas fabriquer plus de 1100 unités du modèle électronique QL-500.

La contribution au bénéfice du modèle QL-500 est de 66€ l'unité, alors que celle du modèle QL-700X est de 84€.

L'entreprise Genco souhaite déterminer le programme optimal de fabrication à mettre en œuvre, c'est-à-dire celui qui maximiserait le bénéfice total.

2 MODELISATION MATHEMATIQUE

Les **variables** du programme linéaire représentent les valeurs que l'on cherche à déterminer. Dans ce problème, on cherche à déterminer les quantités à fabriquer pour chaque produit. On introduit alors les variables suivantes :

x_1 : le nombre d'unités à fabriquer du modèle QL-500

x_2 : le nombre d'unités à fabriquer du modèle QL-700X

Les **contraintes** à imposer sont liées à la disponibilité en heures de chaque département (tableau ci-dessus), ainsi qu'à la politique de l'entreprise qui ne souhaite pas fabriquer plus de 1100 unités de QL-500. Ainsi, les contraintes sont :*

- $C_1 :\ 3x_1 + 4x_2 \leq 4200$ *(le nombre total d'heures en assemblage phase 1 ne doit pas dépasser les 4200 heures)*
- $C_2 :\ x_1 + 3x_2 \leq 2250$ *(le nombre total d'heures en assemblage phase 2 ne doit pas dépasser les 2250*

* *On suppose ici que la somme des 2 derniers chiffres de votre N° étudiant est 3. Dans votre programme linéaire, le coefficient de x_1 dans la contrainte C_1 sera éventuellement différent.*

heures)

- $C_3 :\ 2x_1 + 2x_2 \leq 2600$ *(le nombre total d'heures en vérification ne doit pas dépasser les 2600 heures)*
- $C_4 :\ x_1 \leq 1100$ *(l'entreprise ne souhaite pas fabriquer plus de 1100 unités de QL-500)*

Les deux variables sont positives, puisqu'elles représentent des quantités à fabriquer. On complète donc avec les contraintes :

- $C_5 :\ x_1 \geq 0$
- $C_6 :\ x_2 \geq 0$

Finalement, on identifie la **fonction économique** et on indique si notre objectif et de <u>maximiser</u> ou de <u>minimiser</u> sa valeur. Ici, on souhaite maximiser le bénéfice total, donc la fonction économique est :

$Z = 66x_1 + 84x_2$ **[à maximiser]**

3 PREPARER LA FEUILLE DE CALCUL EXCEL

Avant d'appeler le solveur, il faut « traduire » la formulation mathématique en termes de fonctions d'Excel. Pour cela, nous allons construire une feuille de calcul Excel qui regroupe toutes ces informations, avant de les fournir au solveur.

Il y a trois principales parties à fournir au solveur d'Excel :

- La plage des variables de décision (x_1,x_2).
- Les contraintes.
- La cellule à maximiser/minimiser (fonction économique).

Il y a plusieurs façons de disposer ces informations dans une feuille de calcul. Nous utiliserons dans cet exemple une façon qui se rapproche de la modélisation d'un programme linéaire. Toutefois, il est parfois plus convenable de représenter l'information d'une autre façon. Cela dépend du problème et de la manière dont on souhaite présenter les données.

A minima, vous devez avoir dans votre feuille de calcul :

- Une plage de cellules avec une cellule pour chaque variable de décision.
- **Pour chaque contrainte** : une cellule qui contient la <u>formule Excel</u> qui donne le **membre gauche** de la contrainte en termes des cellules des variables, et une cellule qui contient la formule qui donne le **membre droit**.
- Une cellule qui contient la <u>formule Excel</u> de la **fonction économique**, en termes des cellules des variables.

Ouvrez un nouveau classeur Excel et entrez les informations que vous voyez dans la figure : (voir après la figure pour quelques explications)

	A	B	C	D	E	F
1	**VARIABLES**					
2		**QL-500**	**QL-700X**			
3	**Nombre d'unités**	600	200			
4						
5	**CONTRAINTES**					
6				**ressources nécessaires**	**sens**	**ressources disponibles**
7	**assemblage (phase 1)**	3	4		<=	4200
8	**assemblage (phase 2)**	1	3		<=	2250
9	**vérification**	2	2		<=	2600
10	**quantité de QL-500**	1	0		<=	1100
11						
12	**FONCTION ECONOMIQUE**					
13						
14	**Bénéfice**	66	84			

1. Les cellules B3, C3 seront les variables du problème (x_1 et x_2). Pour le moment, vous pouvez les laisser vides, ou bien entrer les valeurs du programme de fabrication actuel (600 unités de QL-500, 200 unités de QL-700X). Le solveur va remplacer ces valeurs par les valeurs de la solution optimale.
2. Pour chaque contrainte, les coefficients des variables sont inscrits de B7 à C10. Les cellules B7:B10 contiennent les coefficients de x_1. Les cellules C7:C10 contiennent les coefficients de x_2. *Les contraintes de positivité ($x_1, x_2 \geq 0$) n'apparaissent pas ici ; on va les fournir lorsqu'on appelle le solveur.*
3. La quantité des ressources disponibles est indiquée de F7 à F10.
4. Le sens de l'inégalité de chaque contrainte est indiqué de E7 à E10. Cet élément est facultatif ; il sert seulement d'aide-mémoire lorsqu'on appelle le solveur.
5. Le bénéfice unitaire pour chaque produit est indiqué dans les cellules B14, C14.
6. Contrainte C_1 : $3x_1 + 4x_2 \leq 4200$. Vous devez fournir au solveur la formule qui calcule la partie gauche de l'inéquation. Entrez dans la cellule D7 la formule `=B7*$B$3+C7*$C$3`, équivalente à $3x_1 + 4x_2 \leq 4200$.
7. Copiez cette formule pour les autres contraintes :

	A	B	C	D	E	F
1	**VARIABLES**					
2		**QL-500**	**QL-700X**			
3	**Nombre d'unités**	600	200			
4						
5	**CONTRAINTES**					
6				**ressources nécessaires**	**sens**	**ressources disponibles**
7	**assemblage (phase 1)**	3	4	=B7*$B$3+C7*$C$3	<=	4200
8	**assemblage (phase 2)**	1	3	=B8*$B$3+C8*$C$3	<=	2250
9	**vérification**	2	2	=B9*$B$3+C9*$C$3	<=	2600
10	**quantité de QL-500**	1	0	=B10*$B$3+C10*$C$3	<=	1100
11						
12	**FONCTION ECONOMIQUE**					
13						
14	**Bénéfice**	66	84			

8. Vous devez également fournir au solveur la formule qui calcule la fonction économique. Entrez en D14 la formule `=B14*$B$3+C14*$C$3`. C'est cette cellule qu'on va demander au solveur de

maximiser, car elle correspond à la fonction objectif $66x_1 + 84x_2$.

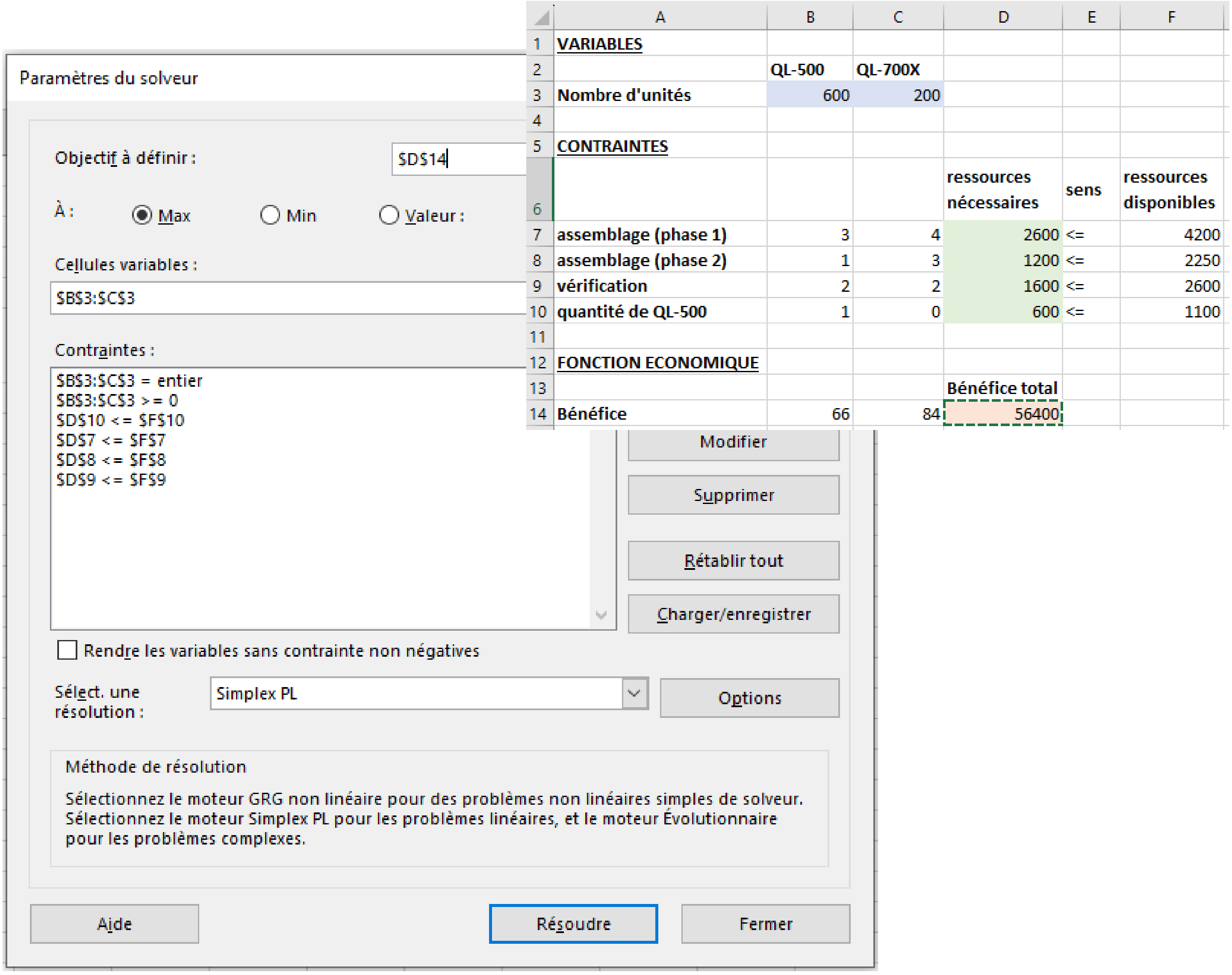
	A	B	C	D	E	F
1	**VARIABLES**					
2		**QL-500**	**QL-700X**			
3	**Nombre d'unités**	600	200			
4						
5	**CONTRAINTES**					
6				**ressources nécessaires**	**sens**	**ressources disponibles**
7	**assemblage (phase 1)**	3	4	=B7*$B$3+C7*$C$3	<=	4200
8	**assemblage (phase 2)**	1	3	=B8*$B$3+C8*$C$3	<=	2250
9	**vérification**	2	2	=B9*$B$3+C9*$C$3	<=	2600
10	**quantité de QL-500**	1	0	=B10*$B$3+C10*$C$3	<=	1100
11						
12	**FONCTION ECONOMIQUE**					
13				**Bénéfice total**		
14	**Bénéfice**	66	84	=B14*$B$3+C14*$C$3		

4 APPELER LE SOLVEUR

Vous êtes maintenant prêts à appeler le solveur d'Excel. Si vous n'avez jamais utilisé le solveur, il faut activer le complément Solveur : Fichier → Options (en bas à gauche) → Compléments → Compléments Excel (en bas) → Atteindre… → cochez la case « Complément Solveur » → OK.

Affichez la fenêtre du solveur en cliquant sur le bouton 

, accessible dans le menu Données, rubrique Analyse.



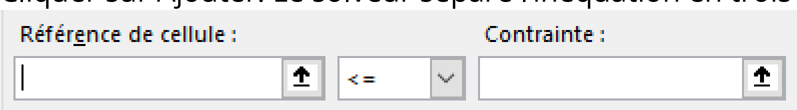
	A	B	C	D	E	F
1	VARIABLES					
2		QL-500	QL-700X			
3	Nombre d'unités	600	200			
4						
5	CONTRAINTES					
6				ressources nécessaires	sens	ressources disponibles
7	assemblage (phase 1)	3	4	2600	<=	4200
8	assemblage (phase 2)	1	3	1200	<=	2250
9	vérification	2	2	1600	<=	2600
10	quantité de QL-500	1	0	600	<=	1100
11						
12	FONCTION ECONOMIQUE					
13				Bénéfice total		
14	Bénéfice	66	84	56400		

Entrez les paramètres du solveur :

1. **Objectif à définir** : Ceci correspond à la cellule qui contient la fonction économique (D14).
2. **A** : Cochez le type d'optimisation voulu. Le <u>Max</u> est coché car dans cet exercice nous voulons <u>maximiser</u> le bénéfice total.
3. **Cellules variables** : Sélectionnez la plage de cellules où se trouvent les variables. Les cellules B3:C3 représentent les variables de notre problème, dont les valeurs on désire déterminer.
4. **Contraintes** : Vous devez spécifier <u>toutes</u> les contraintes du programme linéaire.
   Il ne faut pas oublier d'entrer les contraintes de positivité.
   - Cliquez sur Ajouter. Référence de cellule : sélectionnez toutes vos variables (plage : `$B$3:$C$3`). Inscrivez le sens de l'inégalité >=. Contrainte : 0.

   Les variables doivent être des entiers afin de ne pas produire des fractions d'unités.
   - Cliquez sur Ajouter. Référence de cellule : sélectionnez toutes vos variables. Choisissez « ent ».

   Pour enregistrer les autres contraintes :
   - Cliquer sur Ajouter. Le solveur sépare l'inéquation en trois parties :

   - Dans la **référence de cellule**, vous mettez la cellule qui contient la formule du <u>membre gauche</u> de l'inéquation (D7 pour la première contrainte).

- Au milieu, vous inscrivez le sens de l'inégalité comme <=. *(aide-mémoire des cellules E7:E10)*
- Dans la **contrainte**, vous mettez la cellule qui contient le membre droit de l'inéquation (F7 pour la première contrainte, nombre de ressources disponibles).

La contrainte C_1 correspond ainsi à $D$7<=$F$7. Répétez pour les contraintes C_2, C_3, C_4.

5. **Sélectionner une résolution** : Spécifiez au solveur la méthode de résolution adéquate pour un programme linéaire : Simplex PL.
6. Cliquez sur **Résoudre**.
7. Le solveur calcule la solution optimale selon les contraintes. Choisissez « Conserver la solution du solveur » et cliquez sur OK.
8. Les cellules des variables et du bénéfice total sont mises à jour avec les valeurs de la solution optimale.

5 MODIFIER LE PROGRAMME LINÉAIRE

Dupliquez votre feuille de calcul dans le même classeur. Nous allons modifier certains éléments du programme linéaire et calculer la nouvelle solution optimale.

En raison d'une grève, le temps de vérification pour les deux produits est doublé.

La grève impacte aussi le secteur des transports. La production totale (les deux produits combinés) ne peut donc pas dépasser les 1200 unités, sinon le surplus ne pourra pas être distribué aux points de vente.

Modifiez votre nouvelle feuille de calcul afin d'intégrer ces nouveaux éléments.

Appelez de nouveau le solveur, en intégrant la nouvelle contrainte.