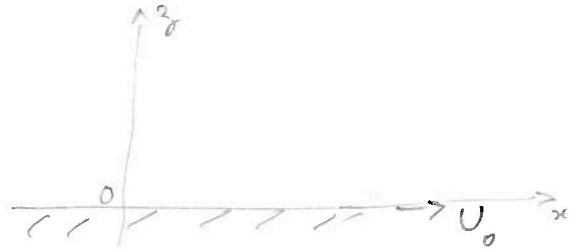
Examen Méca Flu M1 PAM

Partie A : Écoul^t au dessus d'une plaque

I. Démarrage plaque solide imperméable



1°/
$$\begin{cases} \rho \dfrac{\partial u_x}{\partial t} + \rho\left(u_x \dfrac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \dfrac{\partial u_x}{\partial y}\right) = -\dfrac{\partial p}{\partial x} + \eta\left(\dfrac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}\right) \\ \rho \dfrac{\partial u_y}{\partial t} + \rho\left(u_x \dfrac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \dfrac{\partial u_y}{\partial y}\right) = -\dfrac{\partial p}{\partial y} + \eta\left(\dfrac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u_y}{\partial y^2}\right) - \rho g \end{cases}$$

2°/ Solution écoul^t // i.e unidirectionnel ne dépendant pas de la direction correspondante

$$\vec{u} = u_x(\cancel{x}, y, \cancel{t})\, \vec{e}_x$$

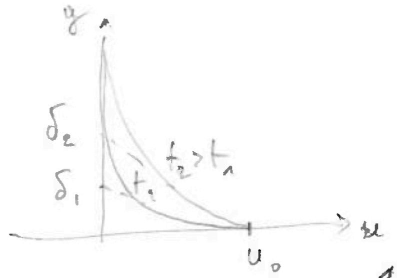
Eq. NS suivant x $\Rightarrow$ $\rho \dfrac{\partial u_x}{\partial t} = \eta \dfrac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}$ car $\dfrac{\partial}{\partial t} = 0$ (stationnaire), $\dfrac{\partial p}{\partial x} = 0$

avec CL : $\begin{cases} u_x(y=0) = U_0 & \text{pour } t \geq 0 \\ u_x(y=+\infty) = 0 & \forall t \end{cases}$

Gravité sans rôle car $\perp$ à x $\Rightarrow$ $\left(\dfrac{\partial p}{\partial y} = -\rho g \text{ avec } u_y = 0\right)$

3°/ Ordre de grandeur NS suivant x : $\rho \dfrac{U_0}{t} \sim \eta \dfrac{U_0}{\delta^2}$ avec δ épaisseur couche limite

$\Rightarrow \delta = (\nu t)^{1/2}$ avec $\nu = \eta/\rho$ viscosité cinématique

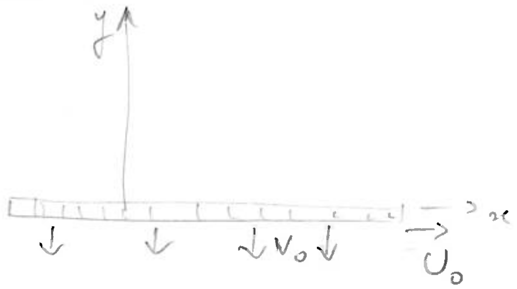


4°/ $\sigma_{xy} = \eta \dfrac{\partial u_x}{\partial y} \sim \eta \dfrac{U_0}{\delta} \sim \eta^{1/2} \rho^{1/2} U_0 t^{-1/2}$

$F = \sigma_{xy} S \sim \eta \dfrac{U_0}{\delta} S \sim \eta^{1/2} \rho^{1/2} U_0 S t^{-1/2}$ dépend de η et ρ, intermédiaire entre visqueux et inertiel

$F \downarrow$ qd $t \uparrow$

II Cas d'une plaque poreuse aspirante



Solution stationnaire $\begin{cases} u_x(y) \\ u_y(y) \end{cases}$

5°/ Incompressibilité $\Rightarrow \operatorname{div}\vec{u} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial u_x}{\partial x} + \dfrac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \Rightarrow \dfrac{\partial u_y}{\partial y} = 0$

$\Rightarrow u_y = \text{cte} = -V_0$ car $u_y(y=0) = -V_0$ donc $\forall y$.

6°/ Eq. NS : $\begin{cases} \rho\, u_y \dfrac{\partial u_x}{\partial y} = \eta \dfrac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} & (1) \\ \rho\, u_y \dfrac{\partial u_y}{\partial y} = -\dfrac{\partial p}{\partial y} + \rho g & (2) \end{cases}$

(2) $\Rightarrow \dfrac{\partial p}{\partial y} = \rho g \Rightarrow$ pression hydrostatique sans rôle dans l'écoul^t

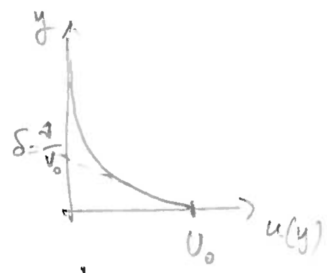
(1) $\Rightarrow -\rho V_0 \dfrac{\partial u_x}{\partial y} = \eta \dfrac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \Rightarrow \dfrac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = \dfrac{-V_0}{\nu} \dfrac{\partial u_x}{\partial y}$

$\Rightarrow \dfrac{\partial u_x}{\partial y} = k\, e^{-y/\delta}$ avec $\delta = \dfrac{\nu}{V_0}$

$\Rightarrow u_x(y) = k' e^{-y/\delta} + k''$

CL : $u_x(y=0) = U_0$ et $u_x(y=+\infty) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k'' = 0 \\ k' = U_0 \end{cases}$

$\Rightarrow \boxed{u_x(y) = U_0\, e^{-y/\delta}}$ avec $\delta = \dfrac{\nu}{V_0}$



épaisseur de couche limite δ indépendante du temps !

7°/ $\sigma_{xy} = \eta \dfrac{\partial u_x}{\partial y} = -\eta \dfrac{U_0}{\delta} = -\rho U_0 V_0$

$F = \sigma_{xy} S = -\eta \dfrac{U_0}{\delta} S = -\rho U_0 V_0 S$

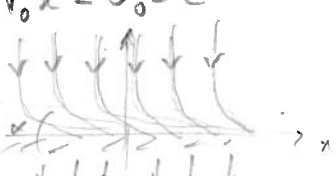
indépendant de y !
proportionnel à ρ et à $U_0 V_0$
expression de type inertielle

(l'aspiration transforme U_0 en V_0 en variation de q^{té} de mvt au niveau de la plaque)

8°/ $u_x = \dfrac{\partial \Psi}{\partial y}$ $\quad \Psi(x,y) = -U_0 \delta e^{-y/\delta} + \text{cte}(x)$

$u_y = -\dfrac{\partial \Psi}{\partial x}$ $\quad \Psi(x,y) = V_0 x + \text{cte}(y)$

$\Psi(x,y) = V_0 x - U_0 \delta e^{-y/\delta}$



$\alpha = \dfrac{U_0}{V_0}$

III - 8/- Paramètres caractéristiques du problème :

- Force : $[F] = MLT^{-2}$
- Viscosité : $[\eta] = ML^{-1}T^{-1}$
- Masse volumique : $[\rho] = ML^{-3}$
- Vitesse : $[V_0] = LT^{-1}$
- Vitesse $[U_0] = LT^{-1}$
- Surface $[S] = L^2$

9/- On a 3 grandeurs indépendantes M, L, T.

Il existe donc $6-3=3$ nombres sans dimension dans ce problème.

On prend comme grandeurs indépendantes η, S, V_0.

$$\pi_1 = F\,\eta^\alpha S^\beta V_0^\gamma \qquad \pi_1 = \frac{F}{\eta\sqrt{S}\,V_0}$$

$$\pi_2 = \rho\,\eta^\alpha S^\beta V_0^\gamma \qquad \pi_2 = \frac{\rho V_0 \sqrt{S}}{\eta}$$

$$\pi_3 = U_0\,\eta^\alpha S^\beta V_0^\gamma \qquad \pi_3 = \frac{U_0}{V_0}$$

On a donc une relation entre π_1, π_2 et π_3 de la forme $\pi_1 = f(\pi_2, \pi_3)$

$\pi_1 \sim$ Force de Stokes
$\pi_2 \sim$ Nombre de Reynolds
$\pi_3 \sim$ Rapport des vitesses

Par exemple on peut construire $\pi_1 \propto \pi_2 \cdot \pi_3$ soit $F \propto \eta\sqrt{S}\,V_0 \,\frac{\rho V_0 \sqrt{S}}{\eta}\,\frac{U_0}{V_0}$

Soit : $F \propto \rho V_0 U_0 S$

Partie B : Ecoul^t tourbillonnaire

1°/ Incompressibilité $\Rightarrow \mathrm{div}\,\vec{u} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r}\frac{\partial (r u_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0.$

$u_\theta(r) \Rightarrow \mathrm{div}\,\vec{u} = 0 \quad \forall r$

2°/ Rotationnel $\vec{\mathrm{rot}}\left[u_\theta(r)\,\vec{e}_\theta\right] = \frac{1}{r}\frac{\partial (r u_\theta)}{\partial r}\,\vec{e}_z.$

Pour $r \leq a$ $\quad u_\theta(r) = \frac{\Gamma r}{2\pi a^2} \Rightarrow \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{u} = \frac{\Gamma}{\pi a^2}\,\vec{e}_z = \mathrm{cte}$

Pour $r \geq a$ $\quad u_\theta(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \Rightarrow \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{u} = 0$

3°/ Circulation $c = \oint_{\mathcal{C}} \vec{u}\cdot\vec{dl}$

Contour circulaire centré sur l'origine

Pour $r \leq a$ $\quad c = \int_0^{2\pi} \frac{\Gamma r}{2\pi a^2}\, r\, d\theta = \frac{\Gamma r^2}{a^2}$

Pour $r \geq a$ $\quad c = \int_0^{2\pi} \frac{\Gamma}{2\pi r}\, r\, d\theta = \Gamma = \mathrm{cte}$

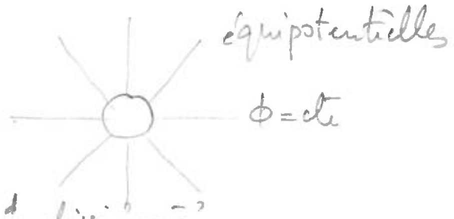
Contour ne contenant pas le coeur

$c = \oint \vec{u}\cdot\vec{dl} = \iint \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{u}\cdot\vec{dS} = 0$ si le contour ne contient pas le coeur

4°/ $\vec{u} = \vec{\mathrm{grad}}\,\phi \qquad \phi$ défini si $\vec{\mathrm{rot}}\,\vec{u} = 0$ donc q^d $r \geq a$.

$u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} \Rightarrow \frac{\partial \phi}{\partial \theta} = r u_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi} \Rightarrow \phi = \frac{\Gamma}{2\pi}\theta + \mathrm{cte}.$

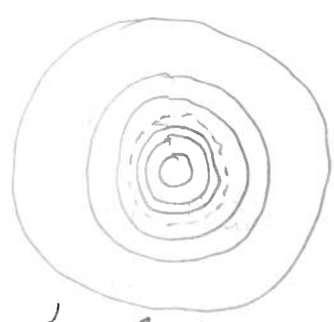
$\Delta \phi = \frac{\Gamma}{8} \Rightarrow \Delta\theta = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}.$



5°/ Fonction de courant ψ définie à 2D q^d $\mathrm{div}\,\vec{u} = \vec{0}$

$u_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r}$

* Pour $r \leq a$ $\quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{\Gamma r}{2\pi a^2} \Rightarrow \psi = \frac{-\Gamma r^2}{4\pi a^2} + \mathrm{cte}$
* Pour $r \geq a$ $\quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{\Gamma}{2\pi r} \Rightarrow \psi = \frac{-\Gamma}{2\pi}\ln r + \mathrm{cte}$



Par conservation du débit, les lignes d'écoulements se resserrent q^d $r \nearrow$ dans le coeur ($r \leq a$) et s'espacent au contraire à l'extérieur ($r \geq a$)

6°/ lignes émission = lignes courant = trajectoires particulaires
car écoul^t stationnaire

7°/ Eq NS suivant r : $-\rho\frac{u_\theta^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r}$ => $\frac{\partial p}{\partial r} > 0$ p ↗ qd r ↗
due "force" centrifuge

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \rho\frac{u_\theta^2}{r}$$

Zone $r \leq a$ $\quad \frac{\partial p}{\partial r} = \rho\frac{\Gamma^2 r}{4\pi^2 a^4}$ => $p(r,z) = \rho\frac{\Gamma^2 r^2}{8\pi^2 a^4} + K_1(z)$ parabolique

Zone $r \geq a$ $\quad \frac{\partial p}{\partial r} = \rho\frac{\Gamma^2}{4\pi^2 r^3}$ => $p(r,z) = \frac{-\rho\Gamma^2}{8\pi^2 r^2} + K_2(z)$ hyperbolique

8°/ Eq. NS suivant z : $0 = -\frac{\partial p}{\partial z} - \rho g$ => $\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$

$$p(z) = -\rho g z + K_3(r)$$

avec $p(z=h) = p_{at}$ => $K_3(r) = p_{at} + \rho g h(r)$

=> $p(r,z) = \rho g h(r) + p_{at} - \rho g z$ ⇔ $h(r) = \frac{p(r,z) - p_{at} + \rho g z}{\rho g}$

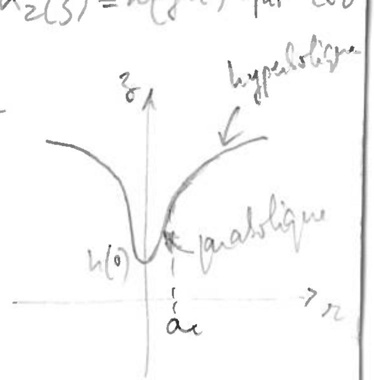
Zone $r \leq a$ $\quad h = h_0$ en $r = 0$ => $K_1(z) = p_{at} + \rho g h_0 - \rho g z$

=> $\boxed{h(r) = h_0 + \frac{\Gamma^2 r^2}{8\pi^2 g a^4}}$ d'où $h(a) = h_0 + \frac{\Gamma^2}{8\pi^2 g a^2}$

profil parabolique => $p(a,z) = \rho g h(a) + p_{at} - \rho g z$

Zone $r \geq a$ $\quad p(a,z) = -\frac{\rho\Gamma^2}{8\pi^2 a^2} + K_2(z) = \rho g h(a) + p_{at} - \rho g z$ => $K_2(z) = 2\rho g h(a) + p_{at} - \rho g z$

=> $\boxed{h(r) = h_0 + \frac{\Gamma^2}{8\pi^2 a^2}\left(2 - \frac{a^2}{r^2}\right)}$



9°/ Bernoulli => Torricelli $U = \sqrt{gH}$

$\frac{1}{2}\rho U^2 = \rho g H$

Création tourbillon => u ↓ ?