

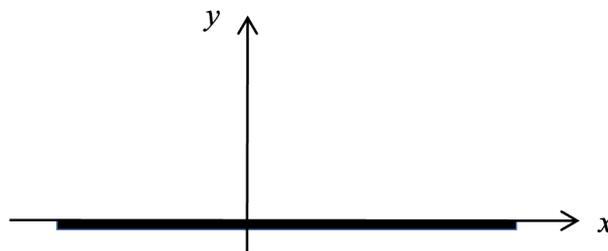
Examen de Mécanique des Fluides
Session 1

Jeudi 9 novembre 2023

Durée 3 heures - sans document sauf 1 feuille A4 RV
Barème approximatif : 11 (3-5-3) – 9

Les téléphones mobiles et tout appareil connectable doivent être éteints et déposés dans un sac fermé au sol

Partie A : Écoulement au-dessus d'une plaque

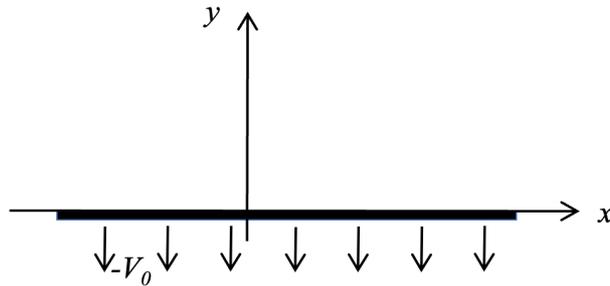


I : Cas du démarrage d'une plaque solide

On considère l'écoulement bidimensionnel dans le plan (x,y) d'un fluide de masse volumique ρ et viscosité η au-dessus d'une plaque solide horizontale située en $y=0$ et de grande extension (supposée infinie). La plaque, initialement fixe avec le fluide au repos au-dessus, est mise en mouvement à l'instant $t=0$ à la vitesse U_0 suivant x maintenue ensuite constante.

1. Ecrire les équations de Navier-Stokes complètes dans cette configuration bidimensionnelle en détaillant l'ensemble des termes.
2. On cherche une solution d'écoulement parallèle à cet écoulement *instationnaire*. Rappeler la définition d'un écoulement parallèle. Ecrire alors les équations de Navier-Stokes simplifiées correspondantes suivant les deux directions x et y . La gravité joue-t-elle un rôle dans l'écoulement ? Pourquoi ? Quelle sont les conditions aux limites à prendre en compte pour la vitesse ?
3. Sans résoudre en détail l'équation suivant x et en supposant qu'il existe une couche limite au voisinage de la plaque, déterminer l'expression de son épaisseur δ par simple estimation des ordres de grandeur des termes de l'équation. Qu'est-ce qu'une couche limite ? Cette couche limite dépend-elle du temps ? Dessiner qualitativement le profil de vitesse à deux instants après le démarrage de la plaque.
4. Donner qualitativement l'expression de la contrainte de cisaillement sur la plaque puis de la force correspondante sur la plaque de surface S en fonction des paramètres du problème. Dépend-elle de la viscosité du fluide ? de sa masse volumique ? du temps ? S'apparente-t-elle à une force visqueuse ou inertielle ? Commenter.

II : Cas d'une plaque poreuse aspirante



On considère que la paroi solide (toujours horizontale en $y = 0$ et en mouvement à la vitesse horizontale U_0 constante suivant x) est maintenant poreuse et qu'on aspire par en-dessous le fluide avec la vitesse verticale $-V_0$ à la paroi. On cherche ici une solution d'écoulement *stationnaire et invariant suivant x* à ce problème.

5. A l'aide de l'équation d'incompressibilité, et d'une condition aux limites qu'on spécifiera, montrer que le vitesse verticale u_y est partout la même. Quelle est sa valeur ?
6. Ecrire soigneusement l'équation de Navier-Stokes suivant les deux directions x et y . Les termes inertiels sont-ils tous nuls ? En spécifiant les conditions aux limites, calculer la vitesse $u_x(y)$ au-dessus de la plaque poreuse. Dessiner l'allure de ce profil de vitesse. Quelle est l'épaisseur de la couche limite ? De quoi dépend-elle ? Commenter.
7. Exprimer la contrainte de cisaillement puis la force correspondante sur la plaque de surface S en fonction des paramètres du problème. Dépend-elle de la viscosité du fluide ? de sa masse volumique ? S'apparente-t-elle à une force visqueuse ou inertielle ? Commenter.
8. Calculer la fonction de courant $\psi(x,y)$ et tracer l'allure des lignes de courant au dessus de la plaque. Quel est l'angle des lignes de courant par rapport à la plaque en $y = 0$ (au niveau de la plaque) ?

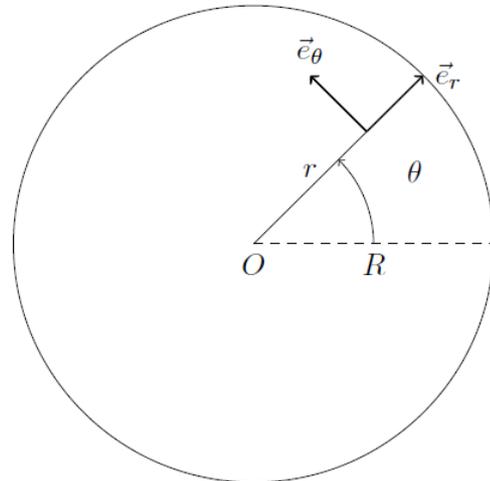
III : Analyse dimensionnelle

On propose ici de faire l'analyse dimensionnelle du problème précédent en cherchant quelle expression peut-on attendre de la force exercée par le fluide sur la paroi poreuse aspirante mobile, sans bien sûr résoudre les équations de Navier-Stokes comme précédemment !

9. Quels sont, en plus de la force, les 5 paramètres caractéristiques du problème ? Pourquoi la gravité n'est-elle pas pertinente dans ce problème ? Donner les dimensions de ces 6 paramètres.
10. Combien de nombres sans dimension peut-on construire avec ces 6 paramètres ? Déterminer leurs expressions ? Quelle relation obtient pour la force ? Quelles relations doit-il exister entre les nombres sans dimensions pour retrouver l'expression obtenue à la question 7 ? Est-ce que ces relations sont peuvent être intuitées sur la base d'arguments physiques simples ? En conclure sur les avantages et les limites de l'analyse dimensionnelle par rapport à la résolution des équations de Navier-Stokes

Partie B : Écoulement tourbillonnaire

On s'intéresse maintenant à l'écoulement tourbillonnaire d'un liquide, de masse volumique ρ , qui peut être observé lors de la vidange, sous gravité et à la pression atmosphérique p_{at} , d'un réservoir cylindrique de grand diamètre ($2R$) percé au fond d'un petit trou de diamètre $d \ll 2R$. On observe expérimentalement qu'une trombe (creux tourbillonnaire) se forme très rapidement au centre de la surface libre (voir figure). On s'intéresse ici au régime *stationnaire* de l'écoulement qui s'établit en réinjectant en permanence en haut le liquide sortant en bas.



La modélisation dite du « tourbillon de Rankine » d'un tel écoulement est simplement bidimensionnelle avec le champ de vitesse suivant :

$$\mathbf{u}(r) = \frac{Br}{2\pi a^2} \mathbf{e}_\theta \text{ pour } r \leq a \text{ et } \mathbf{u}(r) = \frac{B}{2\pi r} \mathbf{e}_\theta \text{ pour } r \geq a$$

où \mathbf{e}_θ est la direction azimuthale (ou orthoradiale) dans les coordonnées cylindriques (r, θ, z) , a le rayon du cœur du tourbillon. On considérera l'axe vertical z orienté vers le haut avec $z = 0$ au fond du récipient.

1. Ce champ de vitesse vérifie-t-il la condition d'incompressibilité dans les deux zones $r \leq a$ et $r \geq a$?
2. L'écoulement décrit par ce champ de vitesse est-il irrotationnel dans les deux zones ?
3. Quelle est la dimension du paramètre B ?
4. Que vaut la circulation Γ de la vitesse sur un contour circulaire de rayon r centré sur l'origine dans chacune des deux zones ? Que vaut-elle sur un contour n'englobant pas la zone du cœur ?
5. Rappeler la définition du potentiel de vitesse ϕ . Pourquoi est-il possible de le considérer dans la zone $r \geq a$? Donner son expression dans cette zone. Représenter dans cette zone quelques lignes équipotentielles, par exemple séparées les unes des autres de $\Delta\phi = B/8$.
6. Pourquoi la fonction de courant ψ est-elle définie dans les deux zones ? Représenter quelques lignes de courant dans ces deux zones. Les lignes de courant ψ séparées d'une même quantité $\Delta\psi$ sont-elles également espacées dans chacune des zones ?
7. Les lignes d'émission, lignes de courant et trajectoires de particules sont-elles confondues pour cet écoulement ? Pourquoi ?
8. A quoi se réduit l'équation de Navier-Stokes suivant la direction radiale \mathbf{e}_r dans les deux zones ? Quelle est la raison physique du gradient radial de pression ? Calculer la pression $p(r, z)$ dans les deux zones, et en commenter la forme de dépendance radiale sans préciser ici la dépendance verticale.

9. A quoi se réduit l'équation de Navier-Stokes suivant la direction verticale \mathbf{e}_z dans les deux zones ? Quelle est la raison physique du gradient vertical de pression ? Calculer $p(r,z)$ en fonction de la pression atmosphérique p_{at} et de la hauteur de la surface libre $h(r)$ [On négligera ici les effets possibles de tension de surface et courbure]. En couplant cette expression avec les expressions déterminées à la question 7, en déduire la forme de la surface libre $h(r)$ dans les deux zones (on notera h_0 la hauteur sur l'axe). Dessiner cette forme. Correspond-elle aux observations ?

10. Après avoir rappelé la loi de vidange de Torricelli d'un récipient dans la condition classique non tourbillonnaire (on rappellera soigneusement le raisonnement conduisant à cette loi), discuter qualitativement de l'influence de la formation du tourbillon et du creux associé sur la loi de vidange.

Formulaire

Circulation : $\Gamma = \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l}$

Théorème de Stokes : $\oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \iint_S \text{rot} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S}$

Théorème de Green-Ostrogradski : $\oint_S \mathbf{u} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \text{div} \mathbf{u} \, d\tau$

Gradient en coordonnées cylindriques : $\text{grad} f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z$

Divergence en coordonnées cylindriques :

$$\text{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Rotationnel en coordonnées cylindriques :

$$\text{rot} \mathbf{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_z$$

Equation de Navier-Stokes en coordonnées cylindriques :

Sur l'axe \mathbf{e}_r :

$$\rho \left[\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\theta^2}{r} \right] = -\frac{\partial p}{\partial r} + f_r + \eta \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) - \frac{u_r}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right]$$

Sur l'axe \mathbf{e}_θ :

$$\rho \left[\frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_r u_\theta}{r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right] = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + f_\theta + \eta \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \right) - \frac{u_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right]$$

Sur l'axe \mathbf{e}_z :

$$\rho \left[\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] = -\frac{\partial p}{\partial z} + f_z + \eta \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right]$$