Examen de Mécanique des Fluides

Jeudi 27 octobre 2022

Durée 3 heures, sans document sauf 1 feuille A4 RV manuscrite, barème approximatif : 10 – 6 – 4

Planche de mer

Pour raviver le cas échéant certains souvenirs d'été, le présent sujet traite de l'hydrodynamique de la planche de mer ou « skimboard ». On s'intéressera donc ici à l'écoulement de fluide sous la planche considérée comme un élément de paroi plane solide de longueur L et largeur l inclinée d'un petit angle θ ($\theta \ll 1$) par rapport au sol horizontal et animée d'une vitesse horizontale U. Deux régimes seront successivement envisagés : un régime où les forces dominantes considérées seront les forces visqueuses correspondant à une analyse de G. I. Taylor[1] de l'université de Cambridge en Angleterre pour le mouvement d'une feuille de papier lancée et glissant longuement sur une table (partie I) ; et un régime où les forces dominantes considérées seront les forces inertielles correspondant à une analyse faite par E. O. Tuck et A. Dixon de l'université d'Adélaïde en Australie[2] (partie II). La partie III invite à retrouver ces différents régimes par analyse dimensionnelle.

On considérera ici que les écoulements sont *incompressibles*, *bidimensionnels* et *stationnaires*. La masse volumique du fluide sera notée ρ et sa viscosité dynamique η. On négligera ici tout phénomène possible de tension de surface.

[1] G. Batchelor, « The Life & Legacy of G.I. Taylor », Cambridge University Press (1994)
[2] E. O. Tuck et A. Dixon, « Surf-skimmer planing hydrodynamics », Journal of Fluid Mechanics, vol. 205, pp. 581-592 (1989)
T. Sugimoto, « Mechanics of the surf-skimmer revisited », American Journal of Physics, vol. 71, pp. 144 (2003).

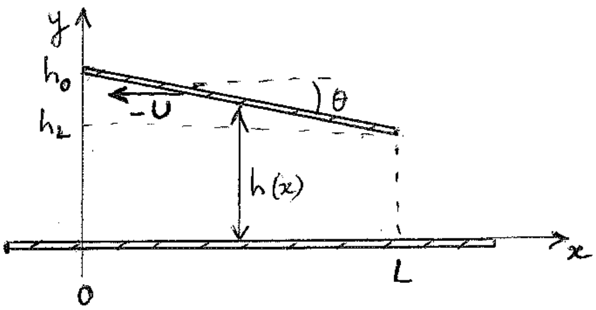
Partie I : Analyse en fluide visqueux

Avant de considérer le cas quelque peu subtil de l'écoulement faiblement non parallèle entre le sol et la planche, nous vous proposons de reprendre pas à pas deux écoulements très simples de fluide *visqueux* entre parois.

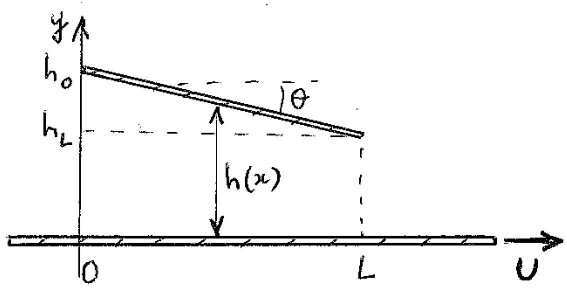
-2) On considère dans un premier temps l'écoulement entre deux parois solides *parallèles* séparées d'une distance h et perpendiculaires à la direction y, la paroi inférieure étant immobile tandis que la paroi supérieure est animée de la vitesse U suivant x. Comment s'appelle cet écoulement ? En cherchant une solution d'écoulement parallèle à ce problème, écrire les équations de Navier-Stokes simplifiées et en déduire le profil de vitesse de l'écoulement (qu'on dessinera) en précisant les conditions aux limites utilisées. Quelle est la contrainte tangentielle aux parois ?

-1) On suppose maintenant que les deux parois sont toujours *parallèles* distantes de h mais qu'elles sont maintenant toutes les deux *immobiles* et que l'écoulement de fluide entre les parois est induit par un gradient de pression dp/dx. Comment s'appelle cet écoulement ? En cherchant encore une solution d'écoulement parallèle à ce problème, écrire les équations de Navier-Stokes simplifiées correspondantes et en déduire le profil de vitesse (qu'on dessinera) en précisant les conditions aux limites utilisées. Dans quel sens a lieu l'écoulement par rapport au gradient de pression ? Quelle est la contrainte tangentielle aux parois ?

0) On considère enfin le cas de l'écoulement entre deux parois planes faiblement *non parallèles* séparées d'une distance $h(x)$, la paroi inférieure étant supposée horizontale et immobile tandis que la paroi supérieure de longueur L est supposée inclinée d'un petit angle θ ($0 < \theta << 1$) par rapport à l'horizontale et animée d'une vitesse $-U$. On notera respectivement h_0 et h_L les épaisseurs de l'écoulement aux deux extrémités en $x = 0$ et $x = L$ et on aura soin de raisonner dans le référentiel lié à la planche, dans lequel la paroi inférieure est alors vue comme animée de la vitesse U.



(a) dans le référentiel du sol



(b) dans le référentiel de la planche

1) Montrer que $h(x)$ peut s'écrire $h(x) = h_0 - \theta x$ en précisant l'expression de θ en fonction de h_0, h_L et L.

2) Quel est l'ordre de grandeur de la vitesse verticale u_y par rapport à la vitesse horizontale u_x ?

3) En déduire, en le justifiant très succinctement, que les équations de Navier-Stokes sont alors identiques aux cas parallèles précédents, à une condition sur le nombre de Reynolds qu'on précisera. Pourquoi peut-on considérer que la pression ne dépend pas de y pour ce qui concerne l'écoulement ? Expliquer pourquoi le gradient de pression dp/dx dépend par contre de x. Montrer en précisant les conditions aux limites utilisées que le profil de vitesse de l'écoulement s'écrit alors

$$u_x(x,y) = -\frac{1}{2\eta}\frac{\partial p}{\partial x}y(h-y) + \frac{U}{h}(h-y). \qquad (1)$$

Préciser de quels écoulements simples cet écoulement est la superposition ? Pourquoi ?

4) En considérant l'écoulement invariant suivant la direction transverse z dans la largeur l de la planche, calculer le débit Q en fonction de U, h, l, η et dp/dx. Ce débit dépend-il de x ? Pourquoi ?

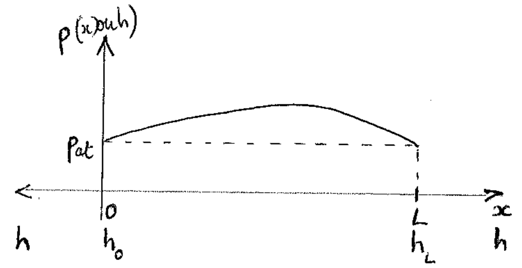
5) Réexprimer alors le gradient de pression dp/dx en fonction de U, h, η et Q. Montrer par un changement de variable qu'on précisera qu'on peut alors obtenir l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial p}{\partial h} = \frac{12\eta}{\theta h^3}\left(\frac{Q}{l} - \frac{Uh}{2}\right). \qquad (2)$$

6) A partir de l'équation ci-dessus, montrer que la prise en compte des deux conditions aux limites sur la pression aux deux extrémités ($p = p_{at}$ en $x = 0$ et L ou $h = h_0$ et h_L) permet de déterminer la pression. Un calcul (pas très compliqué mais un peu long) montre les expressions qu'on peut obtenir pour Q et p:

$$Q = \frac{h_0 h_L U}{h_0 + h_L} \qquad (3)$$

$$p(h) = p_{at} + \frac{6\eta U}{\theta}\frac{(h_0 - h)(h - h_L)}{h^2(h_0 + h_L)} \qquad (4)$$



7) Compte-tenu de la forme de $p(h)$ (ou $p(x)$) (montrée ci-dessus et en reprenant l'expression de la vitesse $u_x(x)$ donnée dans l'équation (1), dessiner l'allure du profil de vitesse aux deux extrémités en $x = 0$ et L ainsi qu'à l'endroit où la pression est maximale. Commenter. Le profil de vitesse dépend-il de la viscosité du fluide ? Pourquoi ?

8) Compte-tenu de l'expression de $p(h)$, exprimer l'expression de la force de portance F_P sur la planche en fonction de η, U, l et θ et d'une intégrale sans dimension qu'on précisera sans forcément la calculer (on pourra faire le même changement de variable qu'à la question 5). Commenter.

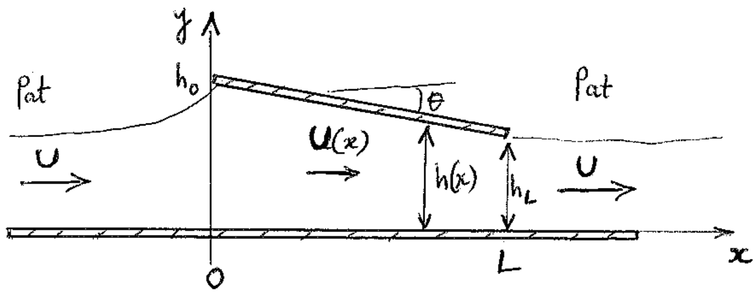
9) Exprimer la force tangentielle F_T sur le sol en fonction de η, U, l et θ et d'une intégrale sans dimension qu'on précisera sans forcément la calculer. Que vaut la force tangentielle exercée sur la planche ?

10) Comment varie le rapport F_P/F_T avec θ ? Commenter.

11) A.N. Calculer θ, F_P/F_T , F_P et Re pour une planche de dimensions $L = 1$ m et $l = 0{,}5$ m dans les deux cas suivants : (a) $U = 10$ m/s, $h_0 = 2$ cm et $h_L = 1$ cm ; (b) $U = 1$ m/s, $h_0 = 2$ mm et $h_L = 1$ mm. Commenter.

Partie II : Analyse en fluide parfait

On considère maintenant le mouvement de la planche à la vitesse -U sur un film d'épaisseur non perturbé h_L. Cela revient à considérer dans le référentiel de la planche un écoulement stationnaire de fluide parfait s'écoulant à la vitesse U.



1) Qu'est-ce qu'un fluide parfait ?

2) Pourquoi peut-on considérer du point de vue de l'écoulement de fluide parfait que la paroi inférieure est aussi de vitesse nulle dans le référentiel de la planche ?

3) Déduire de la conservation du débit, l'expression de la vitesse horizontale du fluide $u_x(x)$ à l'abscisse x en fonction de la vitesse U et des épaisseurs h_L et $h(x)$.

4) En appliquant la relation de Bernoulli (dont on rappellera la signification) sur une ligne de courant qu'on spécifiera, montrer que la pression peut se mettre sous la forme :

$$p(x) = p_{at} + \frac{1}{2}\rho U^2\left(1 - \frac{h_L^2}{h^2(x)}\right) \qquad (4)$$

5) Montrer que la force de portance F_P sur la plaque peut s'exprimer en fonction de ρ, U, L, l et θ, et d'une intégrale sans dimension dont on pourra montrer qu'elle se met sous la forme $1 - \lambda$, en précisant l'expression de λ (on pourra effectuer utilement un changement de variable entre x et h).

6) En déduire l'expression de la force de traînée F_T en fonction de F_P et θ. Comment varie le rapport F_P/F_T avec θ ? Commenter.

7) Montrer, sans aller forcément jusqu'au bout du calcul, qu'on peut retrouver la force de traînée et donc aussi de portance en faisant un bilan de quantité de mouvement sur un volume de contrôle qu'on précisera.

8) A.N. Calculer θ, F_P/F_T , F_P et Re pour une planche de dimensions $L = 1$ m et $l = 0{,}5$ m dans les deux cas suivants : (a) $U = 10$ m/s, $h_0 = 2$ cm et $h_L = 1$ cm ; (b) $U = 1$ m/s, $h_0 = 2$ mm et $h_L = 1$ mm .
Commenter et comparer aux résultats de la partie I.11. Conclusions.

9) En prenant maintenant en compte la viscosité via le développement d'une couche limite sur la plaque, estimer la contrainte d'origine visqueuse sur la plaque ? Quelle est sa dépendance vis-à-vis des différents paramètres dont la viscosité notamment ? En déduire alors une estimation de la force de traînée sur la plaque : quelle est sa dépendance vis-à-vis des différents paramètres, dont notamment la viscosité, la masse volumique, la vitesse et la longueur de la plaque ?

Partie III : Analyse dimensionnelle

On propose ici de faire l'analyse dimensionnelle du problème précédent en cherchant quelle expression peut avoir la force de portance F_P exercée par le fluide sur la planche, sans résoudre cette fois les équations de Navier-Stokes comme cela est proposée dans les parties I et II. Cette autre façon d'aborder le problème pourra permettre d'obtenir, toutefois sans les préfacteurs numériques, les expressions des forces, et donc de vérifier les expressions calculées aux parties I et II.

1. En supposant dans un premier temps que la viscosité n'intervient pas, quels sont, en plus de la force de portance F_P, les 6 paramètres caractéristiques du problème ? Pourquoi la gravité g n'est-elle pas pertinente dans ce problème ? Donner les dimensions de ces 7 paramètres.

Combien de nombres sans dimension peut-on construire avec les 7 paramètres caractéristiques du problème ? Déterminer leurs expressions et en déduire l'expression de la force de portance en fonction des paramètres caractéristiques du problème et des paramètres sans dimensions dont on commentera le sens physique. Quelle dépendance peut-on attendre de la force de portance adimensionnée par rapport à ces paramètres sans dimensions ? Conclusions.

2. Même chose en supposant cette fois que la viscosité du fluide intervient mais pas sa masse volumique. Conclusions

3. Reprendre l'analyse en considérant cette fois qu'interviennent dans le problème à la fois la viscosité et la masse volumique du fluide. Conclusions.