Partiel

Durée de l'épreuve : 2 heures.

Aucun document n'est autorisé, ni aucun dispositif électronique.

Exercice 1 (OPTIMISATION LIBRE)**.** On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - (x - y)^2$$

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

2. Calculer son gradient.

3. Déterminer le ou les points critiques de f.

4. Calculer la Hessienne de f.

5. En déduire la nature du point critique $(1, -1)$.

6. Montrer que f n'a pas d'extremum local en $(0, 0)$.

Exercice 2 (LE PROBLÈME DU RÉGIME ALIMENTAIRE)**.** Une personne cherche à composer son régime alimentaire de sorte qu'il lui coûte le moins cher possible tout en donnant un apport suffisant en protéines. Pour simplifier, on se concentrera sur deux produits : les lentilles qui apporte 2 unités de protéines par kilogramme et coûte 3 € par kilogramme et le soja, qui apporte une unité de protéines par kilogramme et coûte 2 € par kilogramme. L'objectif et d'avoir un minimum de 4 unités de protéines par jour tout en minimisant le coût total. En notant x la quantité de lentilles et y la quantité de soja, on cherche donc à minimiser la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = 3x + 2y$$

sous les contraintes

$$2x + y \geqslant 4 \quad ; \quad x \geqslant 0 \quad ; \quad y \geqslant 0.$$

1. Dessiner l'ensemble $\mathcal{D}$ des points du plan qui satisfont les contraintes.

On admet que f a un minimum global sur $\mathcal{D}$.

2. Montrer que ce minimum ne peut être atteint dans l'intérieur de $\mathcal{D}$.

3. (a) Déterminer les minima globaux des fonctions $F_1 : x \mapsto f(x, 0)$ et $F_2 : y \mapsto f(0, y)$ sur les intervalles $[2; +\infty[$ et $[4; +\infty[$ respectivement.

(b) Déterminer le minimum global de f sur $\{(x, y) \mid 2x + y = 4 \quad ; \quad x \geqslant 0 \quad ; \quad y \geqslant 0\}$.

(c) Déduire de ce qui précède le minimum global de f sur le bord de $\mathcal{D}$.

4. Quel est le régime alimentaire le plus économique ?

Exercice 3 (Optimisation sous contraintes d'égalité). On considère l'ensemble

$$\mathcal{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + 4y = 5 \quad \& \quad x^2 + z^2 = 2y\}.$$

Le but de cet exercice est de déterminer le point de $\mathcal{D}$ le plus proche de l'origine.

Partie I.

1. (a) Justifier que le problème revient à optimiser sous contraintes d'égalités la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2.$$

(b) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer son gradient.

(c) La fonction f admet-elle un minimum global sur $\mathbb{R}^3$?

On s'intéresse maintenant aux fonctions $g_1, g_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définies par

$$g_1(x, y, z) = 2x + 4y - 5 \quad \& \quad g_2(x, y, z) = x^2 + z^2 - 2y.$$

2. Calculer les gradients de g_1 et g_2.

3. Montrer que les gradients forment une famille libre en tout point satisfaisant les contraintes. On peut donc appliquer la méthode de Lagrange.

4. On rappelle que la méthode de Lagrange affirme que si (x, y, z) est un extremum de f sous contraintes d'égalité, alors il existe $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda_1 \nabla g_1(x, y, z) + \lambda_2 \nabla g_2(x, y, z).$$

Écrire le système d'équations correspondant à l'égalité ci-dessus.

Partie II.

5. On suppose dans un premier temps que $z \neq 0$.

(a) Calculer la valeur de λ_1 et λ_2.

(b) En déduire la valeur de y puis celle de x.

(c) En utilisant les contraintes, montrer que $z^2 < 0$ et conclure.

6. On suppose maintenant que $z = 0$.

(a) En utilisant les contraintes, calculer les valeurs possibles de x et y.

(b) En déduire une expression de λ_1, puis de λ_2, en fonction de x.

7. En utilisant ce qui précède, donner tous les points critiques sous contraintes.

8. (a) Montrer que si $(x, y, z) \in \mathcal{D}$, alors

$$\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{11}{4}.$$

(b) Montrer que $\mathcal{D}$ est compacte.

(c) Quel est le point de $\mathcal{D}$ le plus proche de l'origine ?