Mécanique
Acquis d'apprentissage n°7 : Théorème de l'énergie cinétique - Théorème de l'énergie mécanique - solution

1 Les savoir-faire à connaître

Exercice 1 : Vitesse d'impact

1. L'énergie mécanique est égale à l'énergie potentielle plus l'énergie cinétique : $E_m = E_p + E_c$. Juste avant que Sheldon ne lâche la balle, la vitesse est nulle et l'énergie potentielle (ici, de pesanteur) est mgh. On a donc $\boxed{E_{m0} = E_{p0} + E_{c0} = mgh + 0 = mgh}$.
2. On s'intéresse maintenant au moment juste avant que la balle ne touche le sol. On raisonne de cette manière car dès qu'elle touche vraiment le sol il va se passer des choses difficiles à prendre en compte comme la déformation de la balle.
   À ce moment-là l'énergie potentielle est nulle puisque la balle est au niveau du sol, et l'énergie cinétique vaut $\frac{1}{2}mv_f^2$ avec v_f la vitesse juste avant l'impact. Finalement l'énergie mécanique vaut

$\boxed{E_{mf} = E_{pf} + E_{cf} = 0 + \frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{1}{2}mv_f^2}$.

3. Il n'y a pas de frottements ici (ou plus généralement il n'y a pas de force non conservative), donc l'énergie mécanique est conservée au cours du mouvement : $E_{m0} = E_{mf}$, ce qui donne $mgh = \frac{1}{2}mv_f^2$ et donc $\boxed{v_f = \sqrt{2gh}}$. On retrouve bien le résultat de la chute libre.

Exercice 2 : Choc de balles

1. $E_{m,i} = mgh + Mgh$
2. $E_{m,f} = mgH$. L'énergie mécanique se conserve en l'absence de dissipation d'énergie d'où $H = h(\frac{m+M}{m})$.

Exercice 3 : En piste

1. Le théorème de l'énergie mécanique s'écrit $mgh = \frac{1}{2}mv^2 + mg2R$ d'où $v = \sqrt{2g(h-2R)}$.
2. Le théorème de l'énergie mécanique s'écrit $mgh - mg2R = E_{dissipee}$ d'où $E_{dissipee} = mg(h-2R)$.

Exercice 4 : Aspect énergétique de la chute libre

1. $E_{pp} = 0$ et $E_c = \frac{1}{2}mv_0^2$.
2. La composante v_y de la vitesse est nulle au point le plus haut donc $\frac{1}{2}mv_x^2 + mgh = \frac{1}{2}mv_0^2$ donc $v_x = v_0 \cos\alpha$.

3. La conservation de l'énergie mécanique entre le point initial et final a pour expression $\frac{1}{2}mv_l^2 = \frac{1}{2}mv_0^2$ d'où $v_l = v_0$.
4. $mgy = \frac{1}{2}m\frac{v_0^2}{8^2}$ d'où $y = \frac{v_0^2}{128g} = 60\,\text{cm}$.

Exercice 5 : Skieur sur un télésiège

1. Pour répondre à cette question, on peut connaître directement l'expression du travail du poids ou bien le recalculer à partir de la formule.
   Commençons avec la méthode la plus simple. Le poids est constant et vertical, donc le travail du poids est égal au poids multiplié par la différence d'altitude entre le moment initial et le moment final du mouvement : $W(\overrightarrow{P}) = -mg\Delta z$. Le signe moins montre que si Δz est positif, alors le mouvement va vers le haut et le poids s'y oppose. On peut exprimer $\Delta z = l\sin(\alpha)$ où l est la distance parcourue par le télésiège. On trouve donc $\boxed{W(\overrightarrow{P}) = -mgl\sin(\alpha)}$.
   Maintenant regardons la méthode qui part de la formule du travail d'une force. Le travail se calcule entre deux points d'une trajectoire et il faut regarder la composante de la force qui suit la trajectoire, autrement dit il faut faire le produit scalaire de la force avec un vecteur suivant la trajectoire. Exemple : si on pousse un train perpendiculairement aux rails il ne bougera pas, donc on va se fatiguer mais il y aura

zéro travail. La formule est :

$$W_{0\to 500}(\overrightarrow{P}) = \int_0^{500} \overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{dl} = \int_0^{500} -P\sin(\alpha)dl$$

soit

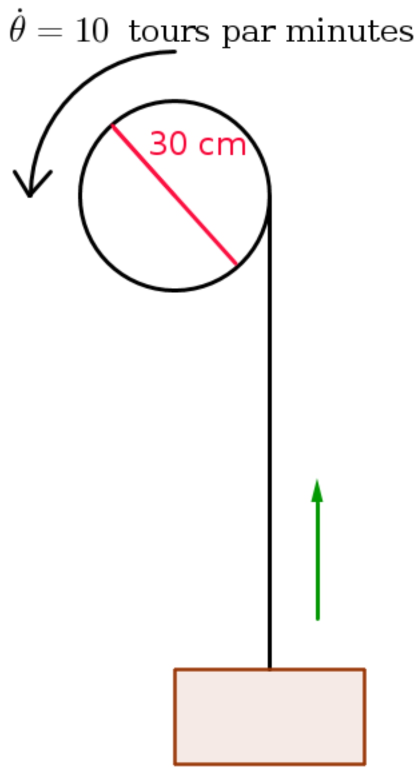
$$W_{0\to 500}(\overrightarrow{P}) = -mg\sin(\alpha)\times(500-0) = -500mg\sin(\alpha)$$

J'explique tous les termes : $0 \to 500$ montre qu'on fait le calcul depuis la position initiale jusqu'à la position finale située à 500 m, $\overrightarrow{P}$ c'est le poids, et $\overrightarrow{dl}$ est l'élément infinitésimal de trajectoire. Attention la trajectoire est penchée d'un angle α, d'où le $-\sin(\alpha)$ qui apparaît en calculant le produit scalaire. L'intégrale est facile à calculer puisqu'on intègre simplement dl le long des 500 m, donc le résultat est 500. On trouve bien le même résultat qu'avec la méthode précédente : $\boxed{W(\overrightarrow{P}) = -mgl\sin(\alpha)}$, avec $l = 500$ m. Calcul numérique : $\boxed{W(\overrightarrow{P}) = -mgl\sin(\alpha) = -75 \times 9{,}81 \times}$

2. Le travail du poids est négatif donc il est $\boxed{\text{résistant}}$ au mouvement.

Exercice 6 : Tambour en rotation

1. La 1 illustre le problème.



On suppose que le fil est assez long pour ne pas que la masse s'enroule autour du tambour. Le mouvement est donc rectiligne et vers le haut, comme représenté par la flèche verte. Si la vitesse est constante, alors les forces se compensent par principe d'inertie : $mg = T$ avec T la tension dans le fil. Cette tension est dirigée vers le haut donc dans le sens du mouvement, sa projection dans le sens du mouvement est donc positive : $+mg$.
En deux minutes, le tambour effectue 20 tours, donc la distance parcourue par la masse est de $20 \times 2\pi r = 20 \times 2\pi \times \frac{0{,}3}{2} = 19\,\text{m}$. Le travail est donc :

$$\boxed{W_{0\to19}(\overrightarrow{T}) = \int_0^{19} mgdy = mg \times (19 - 0) = 3{,}7\,\text{kJ}}$$

Exercice 7 : Glissement d'un objet sur le sol

1. Faire le schéma (identique à l'exercice 4 du TD 6). Le poids $\overrightarrow{P}$ est vers le bas, la réaction normale du support $\overrightarrow{R}_N$ vers le haut et on a $\overrightarrow{P} = -\overrightarrow{R}_N$. La dernière force est la force de frottement du support $\overrightarrow{R}_T$ dirigée vers la gauche.
   Les forces verticales se compensent, donc on ne s'intéresse qu'à ce qui se passe le long de l'axe Ox.

2. Le théorème de l'énergie cinétique nous dit que la variation d'énergie cinétique entre le début et la fin du mouvement ΔE_c est égale au travail de la résultante (la somme) des forces entre le début et la fin du mouvement $W_{\text{début}\to\text{fin}}(\overrightarrow{F})$: $\boxed{W_{\text{début}\to\text{fin}}(\overrightarrow{F}) = \Delta E_c}$. Or le poids et la force normale se compensent, donc la résultante est égale à la force de frottements $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{R}_T$. La force de frottements est résistante au mouvement, on a donc un signe négatif pour le travail : $W_{\text{début}\to\text{fin}}(\overrightarrow{F}) = -R_T \times d$. On sait aussi que $R_T = \mu R_N$ et que $R_N = mg$, on obtient donc $\boxed{W_{\text{début}\to\text{fin}}(\overrightarrow{F}) = -\mu mgd}$.
   La variation d'énergie cinétique est
   $\boxed{\Delta E_c = \frac{1}{2}m(0^2 - v_0^2) = -\frac{1}{2}mv_0^2}$ car la vitesse est nulle à la fin et vaut v_0 au début.
   Finalement, le théorème implique que $-\mu mgd = -\frac{1}{2}mv_0^2$ et donc que $\boxed{d = \frac{v_0^2}{2\mu g}}$.

3. $\boxed{d = \frac{0{,}5^2}{2\times 0{,}4\times 9{,}81} = 0{,}03\,\text{m soit environ } 3\,\text{cm}}$. Si μ diminue, alors $1/\mu$ augmente, et donc d augmente. C'est

logique : moins les frottements sont importants, plus l'objet va loin.

2 La mise en œuvre pour maitriser l'apprentissage

Exercice 8 : Un bloc tiré sur un plan incliné

1. Le principe fondamental de la dynamique a pour expression $\vec{P}+\vec{T}+\vec{R}_N+\vec{R}_T = \vec{0}$ puisque le bloc est tiré à vitesse constante. On projète sur l'axe Oy la relation précédente pour obtenir $||\vec{R}_N|| = ||\vec{P}|| \cos\alpha$.
2. $||\vec{R}_T|| = ||\vec{T}|| - ||\vec{P}|| \sin\alpha$.
3. $||\vec{R}_T|| = \mu||\vec{R}_N||$ d'où $||\vec{T}|| = ||\vec{P}||(\mu\cos\alpha + \sin\alpha)$.
4. $W(\vec{T}) = TL$.
5. $W(\vec{P}) = -LP\sin\alpha$.
6. $W(\vec{T}) + W(\vec{P}) = ||\vec{P}||\mu L\cos\alpha$. Le travail est positif, l'opérateur doit donc fournir du travail pour déplacer le bloc.

Exercice 9 : Deux blocs reliés par une corde

1. On va étudier le système

   $\mathcal{S}$ = masse A + fil + poulie + masse B, et on sait que le fil et la poulie sont supposés être de masse nulle donc ils ne vont pas intervenir. Le système $\mathcal{S}$ ne subit aucune force non conservative, donc le théorème de

l'énergie mécanique nous dit que l'énergie mécanique est conservée :
$\boxed{\Delta E_m = E_{mf} - E_{mi} = 0}$.
Calculons l'énergie mécanique initiale : $E_{mi} = E_{pi} + E_{ci} = E_{piA} + E_{ciA} + E_{piB} + E_{ciB}$. Les termes E_p désignent des énergies potentielles et les termes E_c désignent des énergies cinétiques. Au départ, tout est immobile, donc $E_{ciA} = E_{ciB} = 0$. Le bloc A est à une hauteur inconnue z_A et possède donc une énergie potentielle de pesanteur $E_{piA} = m_A g z_A$, et le bloc B est à une hauteur h et possède donc une énergie potentielle de pesanteur $E_{piB} = m_B g h$. Finalement $\boxed{E_{mi} = m_A g z_A + m_B g h}$.
Maintenant l'énergie mécanique finale : $E_{mf} = E_{pf} + E_{cf} = E_{pfA} + E_{cfA} + E_{pfB} + E_{cfB}$. À la fin du mouvement, le bloc B s'apprête à toucher le sol à une vitesse v_f. Le bloc A est en train de monter avec la même vitesse car les deux blocs sont reliés par la corde qu'on suppose bien tendue. Les énergies cinétiques sont donc $E_{cfA} = \frac{1}{2} m_A v_f^2$ et $E_{cfB} = \frac{1}{2} m_B v_f^2$. Le bloc B est presque au sol, donc il n'a plus d'énergie potentielle : $E_{pfB} = 0$. Le bloc A se trouve plus haut qu'au départ d'une hauteur h puisque le bloc B est descendu d'une hauteur h et que les deux blocs sont reliés. Son énergie potientielle a donc augmenté d'un facteur $m_A g h$: $E_{pfA} = m_A g(z_A + h)$. Finalement, $\boxed{E_{mf} = m_A g(z_A + h) + \frac{1}{2}(m_A + m_B) v_f^2}$.
L'égalité des énergies mécaniques initiale et finale donne : $m_A g z_A + m_B g h = m_A g(z_A + h) + \frac{1}{2}(m_A +$

$m_B)v_f^2$, donc $m_B gh = m_A gh + \frac{1}{2}(m_A + m_B)v_f^2$, et on peut ré-écrire : $\boxed{v_f = \sqrt{\frac{2(m_B - m_A)gh}{m_A + m_B}}}$.
Application numérique :
$\boxed{v_f = \sqrt{\frac{2\times(2-0{,}200)\times 9{,}81\times 0{,}30}{2+0{,}200}} = 2{,}2\,\mathrm{m\,s^{-1}}}$.

Exercice 10 : Énergie mécanique d'un pendule

C'est pas sur le schéma, mais le point H correspond à la hauteur du pendule quand $\theta = 0$. Si on prend notre origine des axe au point de fixation du fil au plafond, et qu'on oriente y vers le bas, on a alors $H = l$.

1. À $t = 0$, la vitesse est nulle et donc l'énergie cinétique aussi. L'énergie potentielle de pesanteur est égale à mgz_0. Pour simplifier on définit un axe Oz vertical vers le haut, et on place son origine au point auquel passe la masse quand $\theta = 0$. Tracez maintenant le triangle qui suit la ligne pointillée du schéma et don l'hypoténuse est le fil de longueur l. La distance entre le point d'attache du fil et la projection de la masse sur Oz est alors $l\cos(\theta_m)$. Ainsi, la hauteur initiale de la masse m est de $l(1-\cos(\theta_m))$. L'énergie potentielle est donc $mgl(1-\cos(\theta_m))$. Finalement, l'énergie mécanique à $t = 0$ est $\boxed{E_{mi} = mgl(1-\cos(\theta_m))}$.
2. $\boxed{\text{L'énergie mécanique est constante}}$ dans le temps, en effet il n'y a pas de frottements (il s'agit du théorème de l'énergie mécanique). Pour tout t, on a donc $\boxed{E_m(t) = mgl(1-\cos(\theta_m))}$.
   Prenons par exemple le cas $\theta = 0$: $E_m = mgl(1 -$

$\cos(\theta_m)) = E_p + E_c$. L'énergie potentielle est nulle par définition de l'axe Oz et l'énergie cinétique vaut $\frac{1}{2}mv^2$, donc $mgl(1 - \cos(\theta_m)) = \frac{1}{2}mv^2$. On trouve $v = \sqrt{2gl(1 - \cos(\theta_m)}$.

Exercice 11 : Déménagement

1. Commençons par le bilan des forces : le poids $\overrightarrow{P}$, la réaction normale $\overrightarrow{R}_N$ et les frottements $\overrightarrow{R}_T$. On a $R_T = \mu R_N$. On nous dit que μ est constant et qu'on néglige les frottements de l'air.
   Choisissons ensuite un système d'axes : on va placer x selon le plan incliné, vers le bas (pour le mettre dans le sens du mouvement), et y perpendiculaire au plan incliné, vers le haut. On appelle α l'angle que fait le plan incliné avec l'horizontale.
   On décompose les forces sur les axes :

$$\begin{cases} P_x = mg\sin(\alpha) \\ P_y = -mg\cos(\alpha) \end{cases}$$

   Le poids et la réaction normale du support se compensent car il n'y a pas de mouvement suivant Oy : $\overrightarrow{R}_N = R_N\hat{u}_y = mg\cos(\alpha)\hat{u}_y$. Et $\overrightarrow{R}_T = R_T\hat{u}_x = -\mu mg\cos(\alpha)\vec{u_x}$. Les composantes de forces qui vont travailler sont alors les composantes suivant Ox, c'est à dire $P_x = mg\sin(\alpha)$ et $R_{Tx} = -\mu mg\cos(\alpha)$.
   On utilise le théorème de l'énergie cinétique. La variation ΔE_c entre le début et la fin est égale au travail

des forces :

$$\Delta E_c = W_{\text{haut}\to\text{bas}}(\Sigma\overrightarrow{F}) = \int_{\text{haut}}^{\text{bas}} mg\left(\sin(\alpha) - \mu\cos(\alpha)\right)\cdot dx$$

Or $\Delta E_c = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_0^2)$ avec v_0 la vitesse initiale et v_f la vitesse finale en bas de la pente. On a donc :

$$\frac{1}{2}m(v_f^2 - v_0^2) = mgL(\sin(\alpha) - \mu\cos(\alpha))$$

$$\Rightarrow \boxed{v_f = \sqrt{2gL(\sin(\alpha) - \mu\cos(\alpha)) + v_0^2}}$$

2. Il n'y a pas de terme de masse dans l'expression de v_f, elle ne sera donc pas modifiée si on multiplie la masse par 4 : $\boxed{v' = v_f}$. par contre l'énergie cinétique est modifiée car elle est proportionnelle à m : on avait $E_c = \frac{1}{2}mv_f^2$ avant, maintenant on a $\boxed{E_c' = 4E_c = 2mv_f^2 = 2mv'^2}$.

Exercice 12 : Travail d'une force de frottement fluide

La poussée d'Archimède n'est pas indiquer sur le schéma, on va donc supposer qu'elle est négligeable, par exemple parce que la bille est beaucoup plus dense que l'air.

1. Le pfd donne $m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = m\overrightarrow{g} - \alpha\overrightarrow{v}$. On projette sur Oz descendant : $m\frac{dv}{dt} = mg - \alpha v$, qu'on ré-écrit plus simplement $\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{v_0}{\tau}}$, avec $\tau = \frac{m}{\alpha}$ et $v_0 = \frac{mg}{\alpha}$.
2. Si $v(t) = v_0(1 - e^{-t/\tau})$, alors $\frac{dv}{dt} = \frac{v_0}{\tau}e^{-t/\tau}$. Donc $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{v_0}{\tau}\left(e^{-t/\tau} + 1 - e^{-t/\tau}\right) = \frac{v_0}{\tau}$. La fonction $v(t)$

proposée est bien solution de l'équation différentielle, on a donc démontré que c'était la solution.

3. On se sert du pfd :

$$W_{x(0)\to x(+\infty)}(\overrightarrow{P}+\overrightarrow{f}) = \int_0^{+\infty} (\overrightarrow{P}+\overrightarrow{f}) \cdot \overrightarrow{v}\, dt$$

d'où

$$W_{x(0)\to x(+\infty)}(\overrightarrow{P}+\overrightarrow{f}) = \int_0^{+\infty} m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} \cdot \overrightarrow{v}\, dt$$

On trouve la primitive $\frac{1}{2}m\overrightarrow{v}^2 = \frac{1}{2}mv^2$, qui a bien pour dérivée $m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} \cdot \overrightarrow{v}$. Donc :

$$W_{x(0)\to x(+\infty)}(\overrightarrow{P}+\overrightarrow{f}) = \frac{1}{2}m[v(t)^2]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}m(v(+\infty)^2 - v(0)$$

4. Le théorème de l'énergie cinétique nous dit que W est égal à la variation d'énergie cinétique : $\Delta E_c = W$. On a : $\Delta E_c = E_c(+\infty) - E_c(0) = \frac{1}{2}m(v_0^2 - 0^2) = \frac{1}{2}mv_0^2$. Donc $\boxed{W = \frac{1}{2}mv_0^2}$. C'est quand même plus rapide !