Mécanique
Acquis d'apprentissage n° 6 : Principe fondamental de la dynamique

Consignes : Justifier toutes les réponses. Une réponse correcte non justifiée est considérée comme fausse en devoir. Soigner la rédaction des réponses et respecter les notations de l'énoncé. Une réponse qui utilise une autre notation est considérée comme fausse en devoir.

Cette série d'exercices doit vous permettre de maîtriser les savoir-faire suivants :

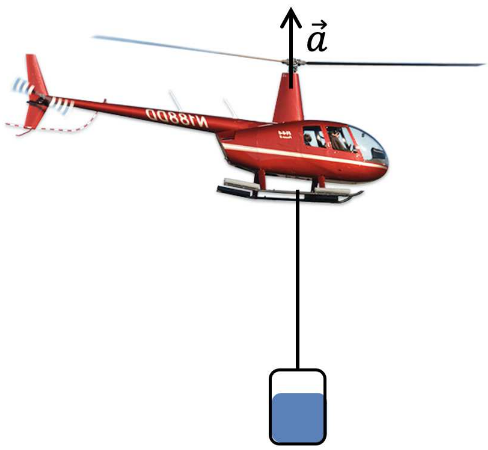
1. Savoir utiliser le pdf avec des forces constantes dans un repère cartésien.
2. Savoir utiliser le pfd avec des forces constantes dans un repère polaire.
3. Savoir utiliser le pfd avec des forces proportionnelles à la vitesse dans un repère cartésien.
4. Savoir utiliser le pfd avec des forces proportionnelles à la position dans un repère cartésien.

1 Les savoir-faire à connaître

Savoir utiliser le principe fondamental de la dynamique avec des forces constantes dans un repère cartésien

Exercice 1 : Hélicoptère

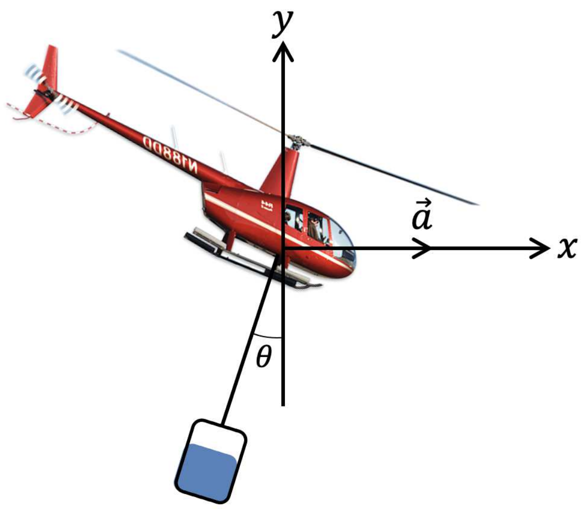
La figure suivante montre un hélicoptère de masse M transportant une masse m d'eau qui est reliée à l'hélicoptère par une corde. L'hélicoptère se déplace verticalement avec une accélération $\vec{a}$. Les frottements de l'air sont négligés.



1. Écrire le principe fondamental de la dynamique appliqué à la masse d'eau.
2. Projeter la relation sur un axe vertical orienté positivement vers le haut et montrer que la tension T dans la corde a pour expression $T = m(a + g)$.
3. En déduire que si la composante de l'accélération de l'hélicoptère vaut $-g$ alors la tension dans la corde est nulle. Comment qualifier le mouvement de l'hélicoptère

dans ce cas ?

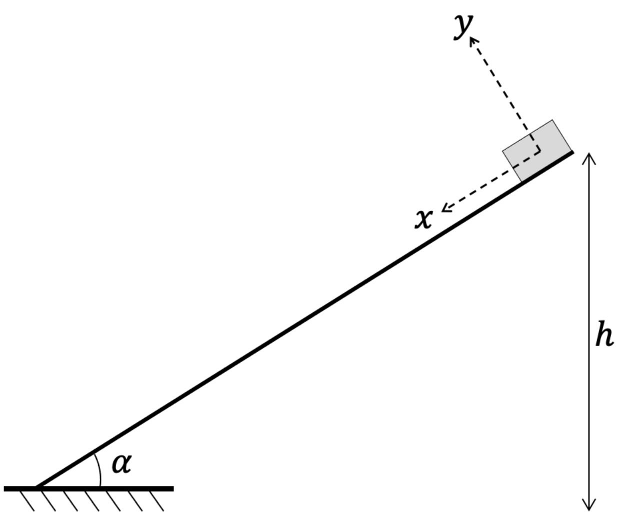
L'hélicoptère accélère maintenant horizontalement avec une accélération $\vec{a} = a_x \widehat{u}_x$.



4. Projeter le principe fondamental de la dynamique appliqué à la masse d'eau sur les axes Oy et Ox.
5. En déduire que $a_x = g \tan(\theta)$.
6. En déduire la valeur de θ si l'hélicoptère se déplace à vitesse constante.
7. Montrer à partir des relations établies à la question 4 que la tension dans la corde a pour expression $T = m\sqrt{a_x^2 + g^2}$.
   Outil mathématique à utiliser : à quoi est égale $\cos^2\theta + \sin^2\theta$?

Exercice 2 : Glissement sur un plan incliné

Un bloc de masse m est lâchée en haut de la pente de la figure suivante sans vitesse initiale. La longueur du bloc est négligeable devant la longueur de la piste et n'est donc pas en prendre en compte dans vos réponses aux questions.



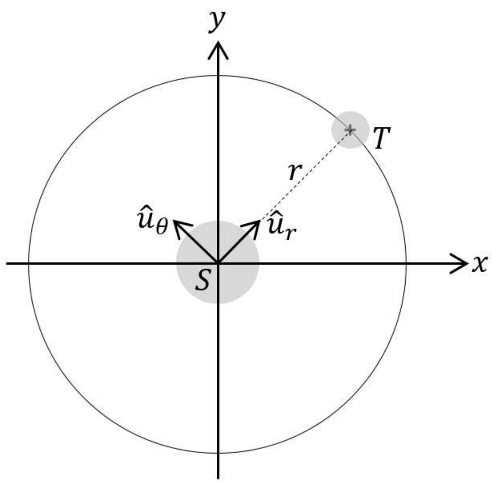
Le bloc glisse sur la pente qui exerce des frottements de glissement sur le bloc. On rappelle que la norme des frottements de glissement a pour expression $||\vec{R}_T|| = \mu||\vec{R}_N||$ où μ est le coefficient de frottements de glissement.

1. Écrire le principe fondamental de la dynamique appliqué au bloc.
2. Projeter le principe fondamental de la dynamique sur l'axe Oy et en déduire l'expression de $||\vec{R}_N||$ en fonction de m, g et α.
3. Projeter le principe fondamental de la dynamique sur l'axe Ox et montrer que la composante v_x de la vitesse a pour expression $v_x = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)t$.
4. Montrer que le temps mis par le bloc pour atteindre le bas du plan incliné a pour expression $t = \sqrt{\frac{2h}{g\sin\alpha(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)}}$.
5. En déduire l'expression de la vitesse du bloc en bas du plan incliné en fonction de h, g, μ et α. Que devient la vitesse du bloc pour $\mu = 0$? Est-ce logique ?
6. Quelle valeur minimale doit valoir α pour que le bloc glisse ?

Savoir utiliser le principe fondamental de la dynamique dans un repère polaire

Exercice 3 : La troisième loi de Kepler

Cet exercice porte sur la troisième loi de Kepler. Pour cette démonstration, nous considérons que les planètes décrivent une orbite circulaire autour du Soleil et que la vitesse orbitale des planètes est uniforme. Dans ce cas, la vitesse angulaire d'une planète est constante et $\dot{\theta} = \frac{2\pi}{T}$ où T est la période de révolution d'une planète autour du Soleil. Le référentiel d'étude, lié au centre du Soleil est Galiléen. Le point S est le centre du Soleil et r est la distance entre le centre du Soleil et le centre de la planète.

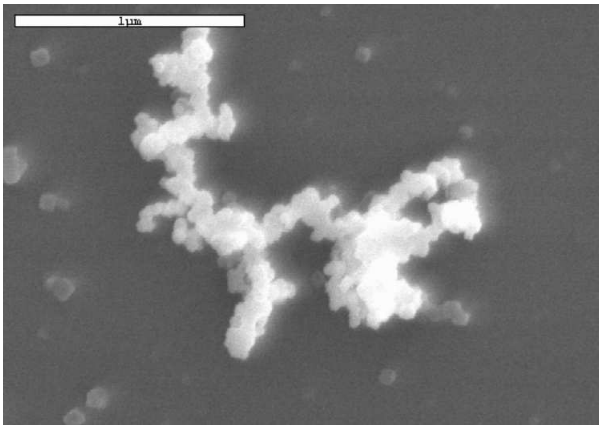


1. Rappeler l'expression vectorielle de la force $\vec{F}$ d'interaction gravitationnelle exercée par le Soleil sur la planète. Nous nommons M_S la masse du soleil et m_p la masse de la planète.
2. Démontrer, à partir de l'expression de la position de la planète $\overrightarrow{ST} = r\hat{u}_r$ en coordonnées polaires, l'expression de l'accélération centripète de la planète dans ce système de coordonnées.
3. Montrer, en utilisant le principe fondamental de la dynamique, que la troisième loi de Kepler s'écrit $\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM_S}{4\pi^2}$ où T est la période de révolution de la planète considérée.
4. On donne $r_{Terre} = 150 \times 10^6\,\text{km}$. Calculer $r_{Jupiter}$ sachant que $T_{Jupiter} = 11,86$ année terrestre.

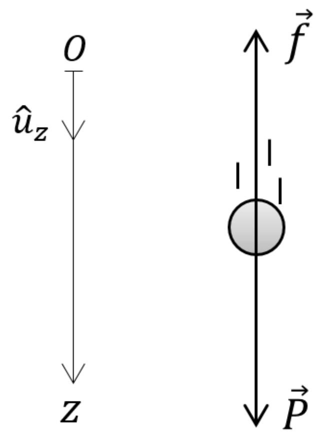
Savoir utiliser le principe fondamental avec des forces proportionnelles à la vitesse dans un repère cartésien

Exercice 4 : Chute d'une particule fine

Nous nous intéressons dans cet exercice à la vitesse de chute des particules fines dans un air calme.
Les formes des particules fines sont variées (voir figure) mais nous pouvons définir le diamètre aérodynamique d'une particule fine comme le diamètre d'une sphère ayant les mêmes propriétés aérodynamiques qu'une particule fine.



La figure montre les forces s'exerçant sur une particule fine en train de tomber. $\overrightarrow{P}$ est le poids de la particule et $\overrightarrow{f}$ est la force de frottement aérodynamique qu'exerce l'air sur la particule. La vitesse de chute d'une particule fine est suffisamment faible pour pouvoir modéliser les frottements par la formule de Stokes $\vec{f} = -6\pi\eta r\vec{v}$ où $\eta = 1{,}8 \times 10^{-5}\,\mathrm{Pa\,s}$ est la viscosité dynamique de l'air et r est le rayon aérodynamique de la particule.



1. Justifier que la poussée d'Archimède est négligeable en calculant le rapport $\frac{||\vec{F}_A||}{||\vec{P}||}$. On donne $\rho_{particule} \simeq 10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ et $\rho_{air} \simeq 1{,}2\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$.
2. Appliquer le principe fondamental de la dynamique au système {particule}. On note $\overrightarrow{v} = v(t)\widehat{u}_z$ la vitesse de la particule. Projeter l'équation obtenue sur l'axe vertical Oz dirigé vers le bas.
3. Montrer que cette équation a pour solution $v(t) = v_l\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ avec $v_l = \frac{mg}{6\pi\eta r}$ et $\tau = \frac{m}{6\pi\eta r}$. La vitesse initiale de la particule est nulle.

4. Déterminer l'expression de la vitesse dans le cas $t << \tau$. Est-ce que cette vitesse dépend des frottements ?

   Outil mathématique à utiliser : nous pouvons approximer la fonction exponentielle par $e^x = 1 + x$ si $x << 1$. On parle de développement limité de la fonction exponentielle à l'ordre 1 en x.

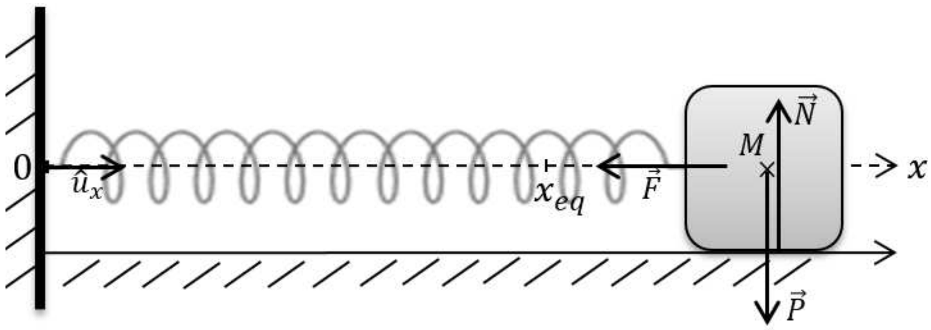
5. Quelle est l'expression de la vitesse de la particule pour $t >> \tau$? on parle de vitesse limite dans ce cas.

6. Tracer le graphe de v en fonction du temps.

Savoir utiliser le principe fondamental de la dynamique avec des forces proportionnelles à la position dans un repère cartésien.

Exercice 5 : Système bloc-ressort

Nous étudions le mouvement d'un bloc de masse m accroché à un ressort de raideur k qui oscille horizontalement sans frottement. Le bloc est écarté de sa position d'équilibre d'une distance $A = 5\,\text{cm}$ puis lâchée sans vitesse initiale à $t = 0$. Nous négligeons la masse du ressort devant la masse du bloc. On note M le centre du bloc et O le point d'attache du ressort sur le bâti. On note $x(t)$ la position du bloc à un temps t quelconque et x_{eq} la longueur au repos du ressort qui est donc la position d'équilibre.



1. Écrire le principe fondamental de la dynamique appliqué au bloc de masse m et montrer que l'équation de la dynamique du mouvement s'écrit $m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x - x_{eq})$ où k est la constante de raideur du ressort.

2. La variable dynamique intéressante dans un problème d'oscillation est l'écart à l'équilibre. Nous posons donc $X(t) = x(t) - x_{eq}$. En déduire l'équation différentielle satisfaite par la variable $X(t)$. On note $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

3. Montrer que $X(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$ où A et B sont des constantes est une solution de l'équation précédente.

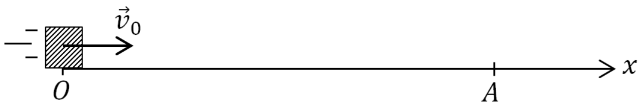
4. Déterminer A et B à l'aide des conditions initiales.

5. Quelle est l'expression de la période du bloc ?

2 La mise en œuvre pour acquérir l'apprentissage

Exercice 6 : Glissement d'un objet sur le sol

Nous allons analyser une expérience que vous pouvez faire chez vous. Prenez un objet rectangulaire et lancez-le en le faisant glisser sur le sol. Nous voulons déterminer la distance que peut atteindre l'objet avant de s'arrêter en fonction de sa vitesse initiale notée $\vec{v}_0$. L'objet subit une force de frottement de glissement en glissant sur le sol. Cette force est toujours opposée à la vitesse de glissement de l'objet et son intensité est donnée par $\|\vec{R}_T\| = \mu\|\vec{R}_N\|$.



1. Projet le principe fondamental de la dynamique sur l'axe Ox et sur l'axe Oy. En déduire que $m\frac{dv}{dt} = -\mu mg$.
2. L'objet s'arrête au point A. Nous nommons d la distance OA. Montrer que $d = \frac{v_0^2}{2\mu g}$.
3. Application numérique : Calculer d pour $\mu = 0,4$ (contact bois/bois) et $v_0 = 0,5\ m/s$. La valeur de μ diminue avec la lubrification. Comment évolue d dans ce cas ?

Exercice 7 : Vitesse de chute d'une bille dans l'eau

Nous étudions la chute d'une petite bille en acier de rayon $r = 1\,\mu\mathrm{m}$ et de masse volumique $\rho = 8000\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ dans l'eau. La bille est soumise à son poids, la poussée d'Archimède et la force de frottement de l'eau sur la bille. La vitesse de chute de la petite bille est suffisamment faible pour pouvoir modéliser les frottements par la formule de Stokes $\vec{f} = -6\pi\eta r\vec{v}$ où $\eta = 1{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{Pa\,s}$ est la viscosité dynamique de l'eau. On rappelle que le volume d'une sphère de rayon r a pour expression $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

On utilise un axe Oz orienté vers le bas.

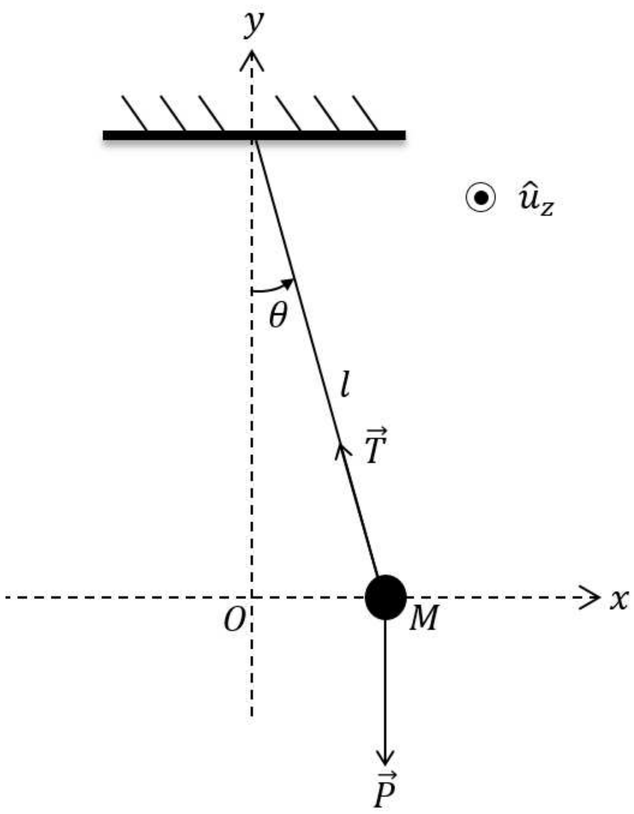
1. Montrer que la projection sur l'axe Oz du principe fondamentale de la dynamique appliqué à la bille s'écrit $\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{\Delta\rho}{\rho}g$ avec $\tau = \frac{2r^2\rho}{9\eta}$.
2. On considère que la bille a une vitesse initiale nulle. Montrer que la solution de l'équation différentielle de la question précédente s'écrit $v = \frac{\Delta\rho}{\rho}g\tau\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$.
3. Quelle est l'expression de la vitesse limite de la bille pour $t >> \tau$?

Exercice 8 : Mouvement d'une planète

1. On repère la position d'une planète qui orbite autour de son étoile par le vecteur position $\overrightarrow{OM}(t) = r(t)\widehat{u}_r$ dans un repère polaire. Déterminer l'expression du vecteur vitesse de la planète.
2. Déterminer l'expression du vecteur accélération de la planète.
3. Appliquer le principe fondamental de la dynamique à la planète et montrer que vous obtenez deux équations :
$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0$$
et
$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -G\frac{M}{r^2}$$
4. Montrer que la première équation implique que $r^2\dot{\theta} = l$ où l est une constante.
5. En déduire que la deuxième équation a pour expression $\ddot{r} = \frac{l^2}{r^3} - G\frac{M}{r^2}$ où l est une constante.
6. Montrer que l'équation d'une ellipse en polaire $r = \frac{p}{1-e\cos\theta}$ est solution de l'équation différentielle de l'équation précédente avec $p = \frac{l^2}{GM}$.

Exercice 9 : Pendule simple

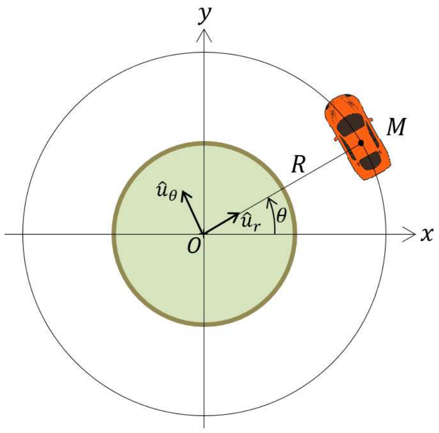
Un pendule simple est constituée d'une masse accrochée à un point fixe par un fil de masse négligeable. Nous notons θ l'angle que fait le fil avec la verticale. Nous étudions le mouvement de la masse dans le cas d'une oscillation aux petits angles tel que $\theta << 1$. Dans ce cas, nous pouvons considérer que la masse reste sur un axe horizontal noté Ox.



1. Projet le principe fondamental de la dynamique sur l'axe Ox et sur l'axe Oy.
2. Pour $\theta << 1$, nous pouvons utiliser les approximations $\cos\theta = 1$ et $\sin\theta = \frac{x}{l}$. En déduire que $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{l}x$.
3. On pose que le bloc est en $x_0 > 0$ avec une vitesse nulle à $t = 0$. Déterminer l'expression de l'équation du mouvement $x(t)$ du bloc. En déduire l'expression de la période des oscillations.
4. Calculer la valeur de la période pour un pendule de longueur $l = 40\,\text{cm}$.

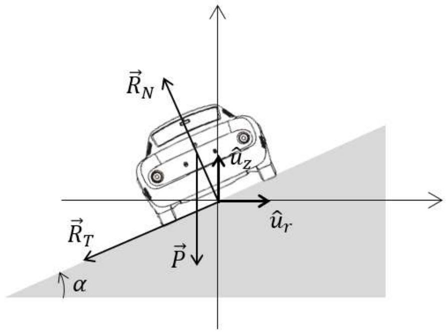
Exercice 10 : Dérapage d'une voiture dans un rond-point

On considère une voiture en rotation à vitesse constante autour d'un rond-point. On note R la distance qui sépare la voiture du centre du rond-point. On note $\overrightarrow{OM} = R\hat{u}_r$ le vecteur position de la voiture. Nous cherchons la vitesse à laquelle peut rouler la voiture autour du rond-point sans déraper.



1. Déterminer l'expression du vecteur vitesse de la voiture en coordonnées polaires.
2. Déterminer l'expression du vecteur accélération de la voiture en coordonnées polaires. Comment-se-nomme cette accélération ?
3. Déterminer l'expression du module de l'accélération en fonction de v et R.

Nous considérons que la route est inclinée d'un petit angle α par rapport à l'horizontale. On note $\vec{R}_T$ la force de frottement exercée par la route sur les pneus de la voiture et $\vec{R}_N$ la réaction normale de la route. La figure suivante montre la situation considérée (l'angle est exagéré sur le schéma).



4. Rappeler les lois de Coulomb pour le frottement solide. Introduire les notions de coefficients de frottement statique μ_s et dynamique μ. En raisonnant par l'absurde, montrer que le coefficient de frottement dynamique doit forcement respecter l'inégalité $\mu \leqslant \mu_s$.
5. Quelle est l'expression de $\vec{R}_T$ lorsque la voiture se met à glisser ?

On note v_l la vitesse scalaire de la voiture à partir de laquelle la voiture se met à glisser.

6. Appliquer le pfd à la voiture dans le repère $(\hat{u}_r, \hat{u}_z)$. Montrer que v_l a pour expression $v_l = \sqrt{Rg\frac{\mu_s \cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \mu_s \sin\alpha}}$.
7. Calculer la valeur de v_l en $\mathrm{km\,h^{-1}}$ pour un rond-point de $10\,\mathrm{m}$ de rayon et une route inclinée de $10°$. On donne $\mu_s = 0{,}8$ pour un contact pneu/route sèche.
8. Que devient l'expression de v_l pour $\alpha = 0°$? Calculer la valeur de v_l en $\mathrm{km\,h^{-1}}$ dans ce cas.