Mécanique
Acquis d'apprentissage n° 6 : Principe fondamental de la dynamique - solution

1 Les savoir-faire à connaître

Exercice 1 : Hélicoptère

1. $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$
2. On projète sur un axe vertical orienté positivement vers le haut pour obtenir $ma = -mg + T$ d'où $T = m(a+g)$.
3. Nous avons donc $T = 0$ si $a = -g$, l'hélicoptère est alors en chute libre.
4. Nous avons toujours $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$. La projection selon l'axe Oy a pour expression $0 = -mg + T\cos\theta$. La projection selon l'axe Ox a pour expression $ma_x = T\sin\theta$.
5. Nous injectons l'expression de T dans la seconde équation pour obtenir $a_x = g\tan(\theta)$.
6. $a_x = 0$ si l'hélicoptère se déplace à vitesse constante, nous en déduisons que $\sin\theta = 0$ d'où $\theta = 0$

7. Nous avons $T^2 \sin^2\theta = m^2 a_x^2$ et $T^2\cos^2\theta = m^2 g^2$. Nous additionnons les deux équations et utilisons $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ pour obtenir $T = m\sqrt{a_x^2 + g^2}$.

Exercice 2 : Glissement sur un plan incliné

1. Le PFD a pour expression : $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{R}_T$.
2. La masse ne se déplace pas selon Oy, l'accélération suivant Oy est donc nulle et la projection du PFD sur cet axe a pour expression $||\vec{R}_N|| = mg\cos\alpha$.
3. La projection du PFD selon l'axe Ox a pour expression $m\frac{dv_x}{dt} = mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha$ d'où $v_x = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)t$ puisque la vitesse initiale du bloc est nulle.
4. Nous avons $x = \frac{1}{2}g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)t^2$. Le bloc parcourt la distance $\frac{h}{\sin\alpha}$ sur la pente d'où $\frac{1}{2}g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)t^2 = \frac{h}{\sin\alpha}$ soit $t = \sqrt{\frac{2h}{g\sin\alpha(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}}$.
5. $v_x = \sqrt{\frac{2gh(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{\sin\alpha}}$. On retrouve bien $v_x = \sqrt{2gh}$ pour $\mu = 0$.
6. $v_x > 0$ si $\alpha > \arctan(\mu)$.

Exercice 3 : La troisième loi de Kepler

1. Voir figure **??**.

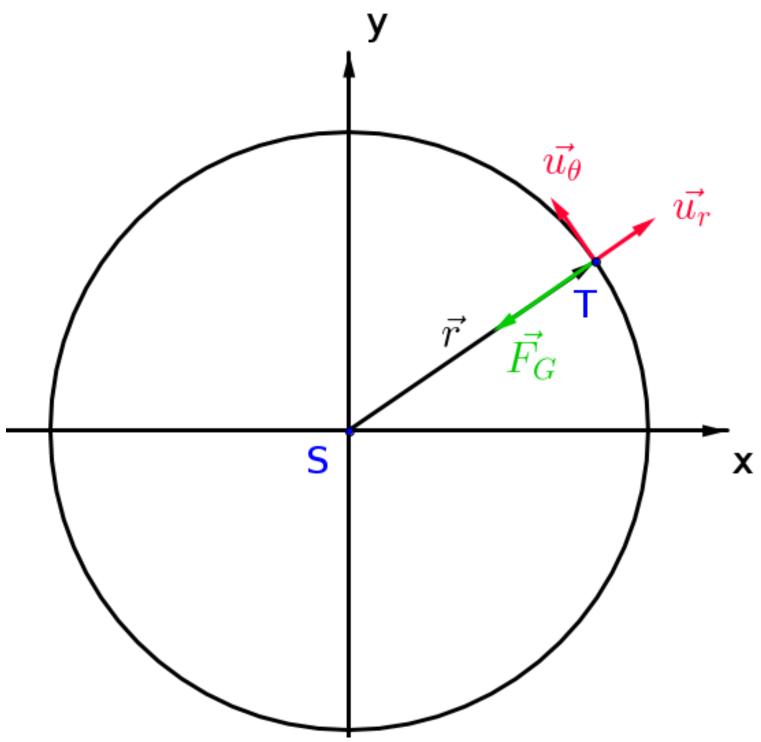

FIGURE 1 – Schéma du problème avec les vecteurs du repère polaire au niveau de la planète.

2. La force gravitationnelle exercée par le Soleil sur la planète est dirigée vers le Soleil :

$$\overrightarrow{F}_G = -G\frac{M_S m_p}{r^2}\hat{u}_r$$

3. Même chose que dans l'exercice 1 du TD 4 puisque le rayon de la trajectoire est constant et la vitesse scalaire est également constante (mouvement uniforme). En résumé : $\overrightarrow{OM}(t) = r\hat{u}_r$
On dérive : $\overrightarrow{v}(t) = \dot{r}\hat{u}_r + r\dot{\theta}\hat{u}_\theta$ (il faut se souvenir de la dérivée des vecteurs unitaires polaires). Le rayon est constant donc $\dot{r} = 0$, donc $\overrightarrow{v}(t) = r\dot{\theta}\hat{u}_\theta$.
On dérive : $\overrightarrow{a}(t) = r \times \left(\ddot{\theta}\hat{u}_\theta - \dot{\theta}^2\hat{u}_r\right)$. Or la vitesse

de rotation est constante, donc $\dot{\theta}$ aussi, donc $\ddot{\theta} = 0$. Enfin, $\boxed{\overrightarrow{a}(t) = -r\dot{\theta}^2\hat{u}_r}$. C'est bien une accélération centripète : elle est selon $\hat{u}_r$, dirigée vers le centre du cercle.

4. On rappelle que la période est le temps mis pour faire un tour complet. La planète parcourt donc le périmètre du cerle $2\pi r$ pendant une période T. La vitesse de la planète est $v = r\dot{\theta}$, donc le temps de parcours est la distance divisée par la vitesse : $\frac{2\pi r}{r\dot{\theta}} = \frac{2\pi}{\dot{\theta}}$. On a donc $T = \frac{2\pi}{\dot{\theta}}$.
   Il n'y a qu'une force ici, le pfd s'écrit alors $m_p\overrightarrow{a} = \overrightarrow{F}_G$, donc :
   $$-m_p r\dot{\theta}^2\hat{u}_r = -G\frac{M_S m_p}{r^2}\hat{u}_r \Rightarrow r\dot{\theta}^2 = G\frac{M_S}{r^2} \Rightarrow r^3\dot{\theta}^2 = GM_S$$
   Or on a dit que $T = \frac{2\pi}{\dot{\theta}}$, donc $\dot{\theta}^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}$. On obtient alors :
   $$r^3\frac{4\pi^2}{T^2} = GM_S \Rightarrow \boxed{\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM_S}{4\pi^2}}$$
   Cette formule est très puissante car elle relie directement le rayon de la trajectoire et sa période, pour n'importe quel astre qui orbite autour du Soleil. Ça marche aussi avec autre chose que le Soleil bien entendu, il faut juste modifier le M_S dans ce cas.
   Dans la réalité les trajectoires des planètes ne sont pas circulaires mais elliptiques. La formule reste valide dans ce cas de figure !

5. On commence par se rendre compte que dans l'équation précédente, $\frac{GM_S}{4\pi^2}$ ne dépend pas de la planète étudiée. Si on nous donne r et T pour une planète, on peut trouver la valeur de $\frac{GM_S}{4\pi^2}$. Et ensuite si on nous donne soit r soit T pour une autre planète et qu'on connaît $\frac{GM_S}{4\pi^2}$, on peut calculer l'autre grandeur. Ici on peut écrire $\frac{r_{\text{Terre}}^3}{T_{\text{Terre}}^2} = \frac{GM_S}{4\pi^2}$ pour la Terre et $\frac{r_{\text{Jupiter}}^3}{T_{\text{Jupiter}}^2} = \frac{GM_S}{4\pi^2}$ pour Jupiter. Les deux équations ont le même terme de droite, on peut donc dire que $\frac{r_{\text{Terre}}^3}{T_{\text{Terre}}^2} = \frac{r_{\text{Jupiter}}^3}{T_{\text{Jupiter}}^2}$, ou encore $r_{\text{Jupiter}}^3 = r_{\text{Terre}}^3 \frac{T_{\text{Jupiter}}^2}{T_{\text{Terre}}^2} = (150 \cdot 10^9)^3 \times \frac{11{,}86\,\text{ans}^2}{1\,\text{an}^2}$. On obtient
$\boxed{r_{\text{Jupiter}} = \sqrt[3]{(150 \cdot 10^9)^3 \times 11{,}86^2} = 780 \times 10^9\,\text{m} = 780 \times 1}$
Rendez-vous compte à nouveau de la puissance de cette formule : connaissant le r et le T de la Terre, il suffit de mesure la période T de n'importe quelle autre planète pour en déduire sa distance au Soleil ! Certes ça peut être très long de mesurer la période d'une planète, mais ça permet de calculer une distance qu'il est impossible à mesurer simplement.

Exercice 4 : Chute d'une particule fine

1. Calculons le rapport entre le poids de la particule et la poussée d'Archimède. Le poids est dirigé vers le bas et sa norme vaut $P = mg = \rho_{\text{particule}} V g$, avec m et V la masse et le volume de la particule. La poussée d'Archimède est dirigée vers le haut et

sa norme vaut $P_A = \rho_{\text{air}} V g$. Le rapport vaut donc $\frac{P}{P_A} = \frac{\rho_{\text{particule}}}{\rho_{\text{air}}} = \frac{1\,000}{1{,}2} \simeq 800$. Le poids est environ 800 fois supérieur à la poussée d'Archimède, c'est suffisant pour pouvoir la négliger.

On ne compare pas la poussée d'Archimède aux frottements car la force de frottement à une norme variable, elle augmente avec la vitesse et n'est donc pas négligeable lorsque la vitesse augmente.

2. Puisqu'on néglige la poussée d'Archimède, il ne reste plus que le poids et la force de frottement qui s'appliquent sur le système particule. Le pfd s'écrit alors $m\frac{d\overrightarrow{v}}{dt} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{f}$. L'axe Oz est orienté vers le bas, on a donc $\overrightarrow{v} = v\hat{u}_z$ dirigé vers le bas, et $\overrightarrow{P} = +mg\hat{u}_z$, et $\overrightarrow{f} = -6\pi\eta r v\hat{u}_z$. Finalement $m\frac{dv}{dt} = mg - 6\pi\eta r v$. On ré-écrit :
$$\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{6\pi\eta r v}{m} = g} \tag{1}$$

3. On veut montrer que $v(t) = v_l(1 - e^{-t/\tau})$ est solution de l'équation ??. On remplace donc v par cette fonction dans l'équation et on vérifie que ça marche. Calculons d'abord $\frac{dv}{dt} = -v_l \times \frac{-1}{\tau} e^{-t/\tau} = \frac{v_l}{\tau} e^{-t/\tau}$. D'après l'énoncé, $\frac{v_l}{\tau} = \frac{mg/(6\pi\eta r)}{m/(6\pi\eta r)} = g$. On a donc $\frac{dv}{dt} = g e^{-t/\tau}$.
Maintenant l'autre terme $\frac{6\pi\eta r v}{m} = \frac{v}{\tau} = \frac{v_l}{\tau}(1 - e^{-t/\tau}) = g(1 - e^{-t/\tau})$.
On peut maintenant calculer la somme : $\frac{dv}{dt} + \frac{6\pi\eta r v}{m} = g e^{-t/\tau} + g(1 - e^{-t/\tau}) = g(e^{-t/\tau} + 1 - e^{-t/\tau}) = g$. On retrouve bien le résultat de l'équation ??.

$\boxed{v(t) = v_l(1 - e^{-t/\tau}) \text{ est bien solution de l'équation ??.}}$

4. Quand $t << \tau$, $|-t/\tau| << 1$. Or on sait que si $x << 1$, on peut utiliser le développement limité de l'exponentielle : $e^x \simeq 1 + x$. Dans notre cas ça donne $e^{-t/\tau} \simeq 1 - \frac{t}{\tau}$ et donc $\boxed{v \simeq \frac{v_l}{\tau}t = gt}$.
   $\boxed{\text{Dans ce cas, le mouvement est une chute libre.}}$
5. Quand $t >> \tau$, on peut dire que $\frac{t}{\tau} \to \infty$, et donc $e^{-t/\tau} \to 0$. On a donc dans ce cas $\boxed{v = v_l}$.
6. La vitesse commence à 0 et tend vers une valeur limite v_l. Elle le fait avec une exponentielle décroissante, comme montré dans la figure ??.

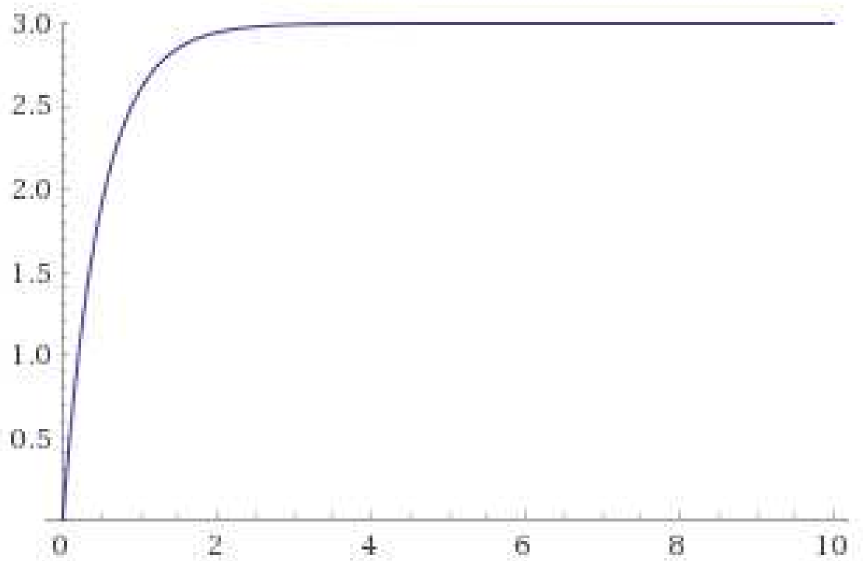

FIGURE 2 – Vitesse de chute en fonction du temps, en unités arbitraires (ici $v_l = 3$).

7. Les particules sont supposées sphériques, donc leur volume est $\frac{4}{3}\pi r^3$ avec r leur rayon. On a donc $\tau = \frac{m}{6\pi\eta r} = \frac{\rho_{\text{particule}} V}{6\pi\eta r} = \frac{\rho_{\text{particule}}\frac{4}{3}\pi r^3}{6\pi\eta r} = \frac{2r^2\rho_{\text{particule}}}{9\eta}$.

Calculons τ_1, avec des particules de diamètre 1 µm, donc de rayon $r = 0{,}5\,\mu\mathrm{m}$: $\tau_1 = \frac{2\times(0{,}5\times10^{-6})^2\times10^3}{9\times1{,}8\times10^{-5}} = \frac{2\times0{,}5^2}{9\times1{,}8} \times 10^{-6\times2+3-(-5)}$. Finalement $\boxed{\tau_1 \simeq 3 \times 10^{-6}\,\mathrm{s}}$.
Pour le calcul de τ_{10}, le rayon est 10 fois plus grand, donc le terme r^2 de l'équation est 100 fois plus grand et les autres termes restent identiques. On a donc $\boxed{\tau_{10} \simeq 3 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}}$.

8. On a $v_l = g\tau$. On sait que g vaut environ $10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, on obtient alors $\boxed{v_{l1} \simeq 3 \times 10^{-5}\,\mathrm{m\,s^{-1}}}$ et $\boxed{v_{l10} \simeq 3 \times 10^{-3}\,\mathrm{m\,s^{-1}}}$

9. Avant de calculer ces intervalles de temps, on peut remarquer que les valeurs de τ sont toutes les deux très petites. On sera donc très vite dans le cas $t >> \tau$, même après seulement quelques millisecondes. On va donc supposer qu'on se trouve toujours dans le cas $t >> \tau$, et on a donc $v = v_l$. Dans ce cas, l'intervalle de temps est donné par $\Delta t = \frac{10}{v_l}$ car la distance parcourue est 10 m. On obtient $\boxed{\Delta t_1 \simeq 3 \times 10^5\,\mathrm{s} \simeq 4\,\mathrm{jours}}$ et $\boxed{\Delta t_{10} \simeq 3 \times 10^3\,\mathrm{s} \simeq 1\,\mathrm{h}}$.
On se rend alors compte que les particule PM_1 restent très longtemps dans l'air, elle peuvent donc s'y accumuler.

Exercice 5 : Système bloc-ressort

1. Le ressort est posé sur le support plat, donc son poids est compensé exactement pas la réaction normale du support. On néglige également les frottements. La seule force qui influence le mouvement est donc la

force de rappel du ressort. On sait que la force de rappel d'un ressort est $-k\Delta x\hat{u}_x$, où $\Delta x = (x - x_{eq})$ est l'écart du bout du ressort par rapport à sa position d'équilibre, k est la constante de raideur du ressort, et le signe négatif montre que la force tend à ramener le bout du ressort vers sa position d'équilibre. Le pfd donne :

$$m\overrightarrow{a} = m\frac{d^2x}{dt^2}\hat{u}_x = -k\Delta x\hat{u}_x$$

On a donc bien

$$\boxed{m\frac{d^2x}{dt^2} = -k(x - x_{eq})}$$

2. La première chose à remarquer est que x et X ne diffère que d'une constante. Leurs dérivées seront donc identiques puisque la dérivation de la constante donne 0 : $\frac{dX}{dt} = \frac{d}{dt}(x - x_{eq}) = \frac{dx}{dt}$. Ceci est donc vrai pour leurs dérivées seconde également : $\frac{d^2X}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}$. On peut donc réécrire l'équation trouvée à la question précédente en y remplaçant $(x - x_{eq})$ par X et $\frac{d^2x}{dt^2}$ par $\frac{d^2X}{dt^2}$:

$$m\frac{d^2X}{dt^2} = -kX \Rightarrow \boxed{\frac{d^2X}{dt^2} + \omega_0^2X = 0}$$

3. Nous devons donc trouver une fonction du temps qui, quand elle est dérivée deux fois, fait apparaître un signe $-$ et une constante. Cette fonction est la fonction cos ou la fonction sin. En effet, en dérivant

$\cos(\omega_0 t)$ on obtient $-\omega_0 \sin(\omega_0 t)$, et en dérivant une seconde fois on trouve $-\omega_0^2 \cos(\omega_0 t)$, ce qui est bien la fonction de départ fois $-\omega_0^2$. Partir de la fonction $\sin(\omega_0 t)$ donne la même chose. Si on commence avec $A\cos(\omega_0 t)$ avec A une constante quelconque, ça marche toujours. Et si on additionne un terme en $\cos(\omega_0 t)$ et un terme en $\sin(\omega_0 t)$, ça marche toujours. On va donc considérer la solution la plus générale possible :

$$X(t) = \alpha \cos(\omega_0 t) + \beta \sin(\omega_0 t)$$

avec α et β des constantes. Il s'agit alors d'identifier α et β. Ceci se fait avec les conditions initiales : les positions et vitesses à $t = 0$, qui sont données dans l'énoncé. On a $v(0) = 0$ et $X(0) = A = 5\,\text{cm}$. Il est généralement plus simple de commencer par la vitesse initiale, qui est nulle. On dérive l'expression de $X(t)$ puis on se place à $t = 0$:

$$v(t) = \frac{dX(t)}{dt} = -\omega_0 \alpha \sin(\omega_0 t) + \omega_0 \beta \cos(\omega_0 t)$$

On se place alors en $t = 0$, où on sait que l'équation précédente est nulle :

$$v(t=0) = 0 = -\omega_0 \alpha \underbrace{\sin(0)}_{=0} + \omega_0 \beta \underbrace{\cos(0)}_{=1} = \omega_0 \beta \cos(0) \Rightarrow$$

Or comme $\omega_0 \neq 0$, on a forcément $\beta = 0$. On peut alors reprendre l'équation générale de $X(t)$, remplacer β par 0 et se placer en $t = 0$, puisqu'on sait que

$X(0) = A$:

$$X(t = 0) = A = \alpha \cos(0) = \alpha$$

À la fin on trouve pour X :

$$\boxed{X(t) = A \cos(\omega_0 t)}$$

La période des oscillations, T, est le temps mis pour revenir à l'état initial : pour aller de $X(0) = A$ à $X(T) = A$. On résout donc $X(T) = A$, et donc on cherche T tel que $\cos(\omega_0 T) = 1$. Ceci est vrai pour $T = 0$ (condition initiale), mais aussi pour $T = \frac{2\pi}{\omega_0} \times n$, avec n un entier. La période correspond alors au cas $n = 1$, c'est à dire $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0}}$.

4. Pour trouver les valeurs max de v et a, il faut d'abord calculer v et a :

$$v(t) = -\omega_0 A \sin(\omega_0 t)$$

$$a(t) = -\omega_0^2 A \cos(\omega_0 t)$$

Le maximum de sin et de cos étant 1, on a $\boxed{v_{\max} = \omega_0 A}$ et $\boxed{a_{\max} = \omega_0^2 A}$.

2 La mise en œuvre pour acquérir l'apprentissage

Exercice 6 : Glissement d'un objet sur le sol

Remarque sur l'exercice : ici μ est le coefficient de frottement dynamique car l'objet est en train de glisser. Ce coefficient peut être un peu différent du coefficient de frottement statique. En effet il est souvent plus difficile de mettre un objet en mouvement pour vaincre le frottement statique que de le pousser alors qu'il glisse déjà (frottement dynamique). Pensez à une lourde armoire : il est difficile de la mettre en mouvement, mais dès que c'est fait c'est plus facile.

1. Il y a déjà le poids dirigé vers le bas et la réaction normale du support dirigé vers le haut. Ces deux forces s'annulent puisque le mouvement est seulement suivant Ox. La dernière force est la force de frottement sur le sol, dirigée vers la gauche puisque l'objet va vers la droite.

2. Commençons par l'axe Oy, c'est le plus facile. Il n'y a aucun mouvement sur cet axe, donc on a $y(t) = 0$: quelque soit t, la position en y est constante. Le poids et la réaction normale du sol se compensent donc, et le pfd s'écrit :

$$m\frac{dv_y}{dt} = -P + R_N = 0$$

(on met un $-$ pour le poids qui va vers le bas, et un $+$ pour R_N qui va vers le haut. On obtient :

$$P = R_N \Rightarrow \boxed{mg = R_N}$$

Suivant l'axe Ox, il n'y a que les frottements. On sait que la vitesse ne va être que selon Ox, on se permet donc d'écrire $\overrightarrow{v} = v\overrightarrow{u_x}$. Et donc :

$$m\frac{dv}{dt} = -R_T$$

(avec un signe $-$ car les frottements s'opposent au mouvement). Puisque $R_T = \mu R_N$, on a :

$$m\frac{dv}{dt} = -\mu R_N \Rightarrow \boxed{m\frac{dv}{dt} = -\mu mg} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -\mu g$$

3. On a alors $\frac{dv}{dt} = -\mu g$, donc $v(t) = -\mu g t + v_0$ avec v_0 la vitesse initiale. Et donc $x(t) = -\frac{1}{2}\mu g t^2 + v_0 t + x_0$ avec x_0 la position initiale. Le mouvement commence à la position 0, donc $x_0 = 0$. On a alors $\boxed{x(t) = -\frac{1}{2}\mu g t^2 + v_0 t}$.
   La distance d'arrêt peut être trouvé en trouvant le temps t_f auquel la vitesse est nulle : $v(t_f) = 0$. L'équation s'écrit $v(t_f) = -\mu g t_f + v_0 = 0$, donc $\boxed{t_f = \frac{v_0}{\mu g}}$.
   On peut alors exprimer $d = x(t_f) = -\frac{1}{2}\mu g \left(\frac{v_0}{\mu g}\right)^2 + v_0\frac{v_0}{\mu g} = -\frac{v_0^2}{2\mu g} + \frac{v_0^2}{\mu g}$. Finalement, $\boxed{d = \frac{v_0^2}{2\mu g}}$.
4. $\boxed{d = \frac{0{,}5^2}{2\times 0{,}4\times 9{,}81} = 0{,}03\,\text{m soit environ } 30\,\text{cm}}$. Si μ diminue, alors $1/\mu$ augmente, et donc d augmente. C'est logique : moins les frottements sont importants, plus l'objet va loin.

Exercice 7 : Vitesse de chute d'une bille dans l'eau

Dans cet exercice, $\Delta\rho = \rho - \rho_{\text{eau}}$

1. On sait que le mouvement ne s'effectue que selon l'axe Oz. On ne va donc pas s'embêter avec les notations vectorielles. On nous dit que l'axe est orienté vers le bas, donc les vecteurs dirigés vers le bas auront une composante positive, les vecteurs dirigés vers le haut auront une composante négative. Commençons par lister les forces :

   — le poids (vers le bas) $P = mg = \rho\frac{4}{3}\pi r^3 g$ car la bille est une sphère ;

   — les frottements de l'eau (vers le haut, car la vitesse est vers le bas) $f = -6\pi\eta r v$;

   — la poussée d'Archimède (vers le haut) $P_A = -\rho_{\text{eau}}\frac{4}{3}\pi r^3 g$.

   Le principe fondamental de la dynamique s'écrit alors :

$$m\frac{dv}{dt} = P+f+P_A \Rightarrow \rho\frac{4}{3}\pi r^3\frac{dv}{dt} = \rho\frac{4}{3}\pi r^3 g - \rho_{\text{eau}}\frac{4}{3}\pi r^3 g - 6\pi r$$

   On divise par $\rho\frac{4}{3}\pi r^3$:

$$\frac{dv}{dt} = \left(\frac{\rho - \rho_{\text{eau}}}{\rho}\right)g - \frac{9\eta v}{2\rho r^2}$$

   On définit $\tau = \frac{2r^2\rho}{9\eta}$ et on obtient :

$$\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{\Delta\rho}{\rho}g} \qquad (2)$$

   En divisant par ρ de chaque côté on obient alors :

2. Pour vérifier que $v(t) = \frac{\Delta\rho}{\rho} g\tau(1-e^{-t/\tau})$ est solution, on l'injecte dans l'équation **??** et on voit si l'égalité est toujours vraie. Voyons cela :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\Delta\rho}{\rho} g\tau(1-e^{-t/\tau})\right)+\frac{\frac{\Delta\rho}{\rho} g\tau(1-e^{-t/\tau})}{\tau} = \frac{\Delta\rho}{\rho} g\tau\frac{d}{dt}\Big(1-$$

$$= \frac{\Delta\rho}{\rho} g\tau(\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau})+\frac{\Delta\rho}{\rho} g(1-e^{-t/\tau}) = \frac{\Delta\rho}{\rho} ge^{-t/\tau}+\frac{\Delta\rho}{\rho} g-\frac{\Delta\rho}{\rho} g$$

Ça marche. On peut vérifier que la vitesse initiale est bien nulle, car $e^0 = 1$, donc $v(t = 0) = 0$.
La solution de l'équation **??** est $\boxed{v(t) = \frac{\Delta\rho}{\rho} g\tau(1-e^{-t/\tau})}$.

3. $\tau = \frac{2\times(10^{-6})^2\times 8\times 10^3}{9\times 10^{-3}} = \frac{16}{9}\times 10^{-12+3+3}$. $\boxed{\tau = 1{,}8\times 10^{-6}\,\mathrm{s}}$.

4. Quand $t << \tau$, on peut écrire que $e^{-t/\tau} \simeq 1-\frac{t}{\tau}$. Et donc $\boxed{v(t) = \frac{\Delta\rho}{\rho} g\tau(1-(1-t/\tau)) = \frac{\Delta\rho}{\rho} gt}$. On a v proportionnel à t comme pour une chute libre.

5. Quand $t >> \tau$, on a $\frac{t}{\tau} \to \infty$ et donc $e^{-t/\tau} \to 0$. On a alors $\boxed{v = \frac{\Delta\rho}{\rho} g\tau}$. La vitesse est presque constante à partir d'un temps suffisamment grand. Par exemple environ 95 % de la vitesse max est atteinte pour $t \geqslant 5\tau$.

6. La vitesse limite est $\boxed{\frac{\Delta\rho}{\rho} g\tau = \frac{8\,000-1\,000}{8\,000}\times 9{,}81\times 1{,}8\cdot 10^{-6} =}$

Exercice 8 : Mouvement d'une planète

1. On dérive la position $\overrightarrow{OM}(t) = r\hat{u}_r$: $\boxed{\overrightarrow{v}(t) = \dot{r}\hat{u}_r + r\dot{\theta}\hat{u}_\theta}$. (il faut se souvenir que $\frac{d\hat{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\hat{u}_\theta$)

2. On dérive à nouveau (attention à tout bien dériver et à ne pas oublier de termes) :

$$\overrightarrow{a}(t) = \ddot{r}\hat{u}_r + \dot{r}\dot{\theta}\hat{u}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\hat{u}_\theta + r\ddot{\theta}\hat{u}_\theta - r\dot{\theta}^2\hat{u}_r$$

où on a utilisé la dérivée de $\hat{u}_r$ comme expliqué avant, et la dérivée de $\hat{u}_\theta$: $\frac{d\hat{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\hat{u}_r$.
On rassemble les termes de l'accélération :

$$\boxed{\overrightarrow{a}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\hat{u}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\hat{u}_\theta}$$

3. La seule force est la force de gravitation qui s'écrit $\overrightarrow{F}_G = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{u}_r$, avec G la constante universelle de la gravitation, M et m la masse de l'étoile et de la planète respectivement, et r la distance entre l'étoile et la planète. Elle est dirigée suivant $-\hat{u}_r$ car il s'agit d'une force attractive.
Le pfd s'écrit $m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{F}_G$.
On le projette suivant $\hat{u}_\theta$ pour commencer. La force F_G n'a pas de composante suivant cet axe, on a donc $F_{G,\theta} = 0$ donc $ma_\theta = F_{G,\theta} = 0 \Rightarrow a_\theta = 0$. La composante de l'accélération suivant cet axe est $a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$. On a donc $\boxed{2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0}$.
Maintenant suivant $\hat{u}_r$, on a $F_{G,r} = -G\frac{Mm}{r^2}$ et $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$. On obtient donc $m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -G\frac{Mm}{r^2}$.
Finalement, $\boxed{\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -G\frac{M}{r^2}}$.

4. On remarque que $2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$ ressemble à la dérivée de $r^2\dot{\theta}$. Elle vaut $\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = r(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})$. Cette grandeur vaut zéro grâce à l'équation de

la question précédente. Donc la dérivée de $r^2\dot{\theta}$ est nulle, donc $r^2\dot{\theta}$ est une constante qu'on appellera l : $\boxed{r^2\dot{\theta} = l}$.

5. On peut maintenant écrire $r\dot{\theta}^2 = \frac{1}{r^3}(r^2\dot{\theta})^2 = \frac{1}{r^3}l^2$. Ainsi l'équation devient $\boxed{\ddot{r} = \frac{l^2}{r^3} - G\frac{M}{r^2}}$.

Exercice 9 : Pendule simple

1. La projection du principe fondamental de la dynamique suivant les axes Ox et Oy produit les deux équations scalaires :

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = -P + T\cos\theta$$
$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -T\sin\theta$$

2. Nous obtenons dans le cadre de l'approximation des petits angles :

$$-P + T = 0 \tag{3}$$

et

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{T}{l}x \tag{4}$$

d'où $\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{g}{l}x$.

3. La solution générale de l'équation différentielle précédente s'écrit $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ avec $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Les conditions initiales impliquent $varphi = 0$ et $A = x_0$. Nous avons $\omega = 2\pi f = 2\pi\frac{1}{T}$ d'où $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$.

4. Application numérique.

Exercice 10 : Dérapage d'une voiture dans un rond-point

1. $\vec{v} = R\dot{\theta}\widehat{u}_\theta$
2. $\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\widehat{u}_R$, c'est l'accélération centripète.
3. $a = \frac{v^2}{R}$.
4. $||\vec{R}_T|| \leqslant \mu_s||\vec{R}_N||$ lorsque le corps ne glisse pas. L'objet commence à glisser lorsque l'égalité est atteinte. $||\vec{R}_T|| = \mu||\vec{R}_N||$ lorsque le corps glisse.

   Si on suppose $\mu > \mu_s$, alors l'objet subit une force de frottement plus grande en glissant que lorsqu'il commence à glisser. Le corps ne se mettrait donc jamais à glisser ce qui est absurde. On doit donc avoir $\mu \leqslant \mu_s$.
5. $||\vec{R}_T|| = \mu_s||\vec{R}_N||$ lorsque la voiture comme à glisser.

On note v_l la vitesse scalaire de la voiture à partir de laquelle la voiture se met à glisser.

6. La projection du pfd sur l'axe $\widehat{u}_r$ donne : $m\frac{v_l^2}{R} = \cos\alpha||\vec{R}_T|| + \sin\alpha||\vec{R}_N||$.

   La projection du pfd sur l'axe $\widehat{u}_z$ donne : $0 = -mg - \sin\alpha||\vec{R}_T|| + \cos\alpha||\vec{R}_N||$.

   En utilisant $||\vec{R}_T|| = \mu_s||\vec{R}_N||$, la deuxième équation se réécrit :

   $0 = -mg - \mu_s\sin\alpha||\vec{R}_N|| + \cos\alpha||\vec{R}_N||$ d'où $||\vec{R}_N|| = \frac{mg}{\cos\alpha - \mu_s\sin\alpha}$

En injectant dans la projection du pfd selon l'axe $\widehat{u}_r$, nous obtenons :
$v_l = \sqrt{Rg\frac{\mu_s \cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \mu_s \sin\alpha}}$.

7. Application numérique.
8. $v_l = \sqrt{\mu_s R g}$ si $\alpha = 0$.