
Mécanique

Acquis d'apprentissage n°5 : Mouvement de rotation - solution

1 Les savoir-faire à connaître

Exercice 1 : Mouvement circulaire uniforme

1. On dérive le vecteur $\overrightarrow{OM}(t)$ avec $r = cst$, nous avons donc : $\overrightarrow{v}(t) = r \frac{d\hat{u}_r}{dt} = \dot{r}\hat{u}_r + r\dot{\theta}\hat{u}_\theta$. On a utilisé le fait que $\frac{d\hat{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\hat{u}_\theta$, le point au-dessus d'une variable signifiant une dérivée par rapport au temps. De plus $\dot{r} = 0$ car le rayon r de la trajectoire est constant donc sa dérivée est nulle. Finalement on a $\boxed{\overrightarrow{v}(t) = r\dot{\theta}\hat{u}_\theta}$.
2. On dérive à nouveau avec $\dot{\theta} = cst$ pour obtenir $\boxed{\overrightarrow{a}(t) = -r\dot{\theta}^2\hat{u}_r}$. L'accélération est dirigée vers l'origine du repère, $\boxed{\text{il s'agit de l'accélération centripète}}$.
3. On a vu que $v = r\dot{\theta}$, donc $\dot{\theta} = \frac{v}{r}$. Le module de l'accélération est $a = \|\overrightarrow{a}\| = r\dot{\theta}^2 = r\frac{v^2}{r^2}$. L'accélération centripète s'exprime ainsi : $\boxed{a = \frac{v^2}{r}}$. Puisque v et r sont des constantes, l'accélération est constante.

4. On nous donne la vitesse $v = 80 \text{ km h}^{-1} = 22,2 \text{ m s}^{-1}$, et le rayon de la trajectoire $r = 500 \text{ m}$. L'accélération vaut donc $a = \frac{v^2}{r} = \frac{22,2^2}{500} = 0,99 \text{ m s}^{-2}$.
5. La fréquence de rotation (nombre de tours de circuit par seconde, en s^{-1}) est l'inverse de la période de rotation (temps pour faire un tour complet, en s) : $f = \frac{1}{T}$. La vitesse de déplacement est v et la distance parcourue est un tour complet : distance = $2\pi r$, on a donc : $v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{v} \Rightarrow f = \frac{v}{2\pi r}$. Or, $v = r\dot{\theta}$, donc $f = \frac{\dot{\theta}}{2\pi}$. La valeur de la fréquence est : $f = \frac{v}{2\pi r} = \frac{22,2}{2 \times \pi \times 500} = 0,0071 \text{ s}^{-1}$. Cela signifie qu'en une seconde, la voiture parcourt 0,71 % d'un tour complet. On peut aussi calculer $T = 141 \text{ s}$, et on trouve que la voiture fait un tour complet en 141 s.

Exercice 2 : Mouvement circulaire

- τ est en secondes car il ne doit pas y avoir d'unité dans l'argument de la fonction exponentielle.
- $v = r\dot{\theta}$ d'où $\dot{\theta} = \frac{v_0}{r}(1 - e^{-t/\tau})$.
- $\theta = \frac{v_0}{r}(t + \tau e^{-t/\tau}) + cst$. Or $\theta(t = 0) = 0$ d'après l'énoncé. On en déduit que $\frac{v_0}{r}\tau + cst = 0$ d'où $\theta = \frac{v_0}{r}(t + \tau e^{-t/\tau} - \tau)$.
- On dérive la vitesse en faisant attention au fait que $\dot{\theta}$ dépend du temps. Nous obtenons donc $\vec{a} = r \frac{d(\dot{\theta}\hat{u}_\theta)}{dt} = r\ddot{\theta}\hat{u}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\hat{u}_\theta}{dt} = r\ddot{\theta}\hat{u}_\theta - r\dot{\theta}^2\hat{u}_r$

5. On injecte l'expression de $\dot{\theta}$ et l'expression de $\ddot{\theta}$ dans l'expression de l'accélération pour obtenir $\vec{a} = \frac{v_0}{\tau} e^{-t/\tau} \hat{u}_\theta - \frac{v_0^2}{r} (1 - e^{-t/\tau})^2 \hat{u}_r$.
6. $e^{-t/\tau} \rightarrow +\infty$ pour $t \rightarrow +\infty$. Nous obtenons donc $\vec{v} = v_0 \hat{u}_\theta$ et $\vec{a} = -\frac{v_0^2}{r} \hat{u}_r$. Le mouvement est alors circulaire uniforme.
7. Nous nous plaçons dans le cas de la question précédente donc dans un mouvement circulaire uniforme. Nous avons donc $T = \frac{2\pi r}{v_0}$.

Exercice 3 : Trajectoire de la Terre

1. Il ne faut pas oublier de dériver le vecteur unitaire : il

tourne de 90° et un $\dot{\theta}$ apparaît : $\vec{v}(t) = \frac{dr}{dt} \hat{u}_r + r \frac{d\hat{u}_r}{dt} = \frac{d\vec{ST}}{dt}$

2. On dérive à nouveau : $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \ddot{r}(t) \hat{u}_r + \dot{r}(t) \frac{d\hat{u}_r}{dt} + \dot{r}(t) \dot{\theta} \hat{u}_\theta + r(t) \ddot{\theta} \hat{u}_\theta + r(t) \dot{\theta} \frac{d\hat{u}_\theta}{dt}$.
 $\vec{a}(t) = \ddot{r}(t) \hat{u}_r + \dot{r}(t) \dot{\theta} \hat{u}_\theta + \dot{r}(t) \dot{\theta} \hat{u}_\theta + r(t) \ddot{\theta} \hat{u}_\theta - r(t) \dot{\theta}^2 \hat{u}_r$

$$\vec{a}(t) = \left(\ddot{r}(t) - r(t) \dot{\theta}^2 \right) \hat{u}_r + \left(2\dot{r}(t) \dot{\theta} + r(t) \ddot{\theta} \right) \hat{u}_\theta.$$

On peut vérifier que chaque terme est bien homogène à une accélération (m s^{-2}).

3. La composante centripète est la composante selon

$$\hat{u}_r, \text{ soit } \vec{a}_r(t) = \left(\ddot{r}(t) - r(t) \dot{\theta}^2 \right) \hat{u}_r.$$

La composante tangentielle est la composante selon

$$\hat{u}_\theta, \text{ soit } \vec{a}_\theta(t) = \left(2\dot{r}(t) \dot{\theta} + r(t) \ddot{\theta} \right) \hat{u}_\theta.$$

Exercice 4 : Mouvement d'un pendule

1. Nous avons $\theta(t) = \theta_M \cos(\omega t)$. Le pendule part donc de θ_M et il revient à θ_M au bout du temps T qui correspond à $\cos(\omega T) = 1$ soit $\omega T = 2\pi$. Nous avons donc $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

2. Comme vu à l'exercice 1, $\vec{v}(t) = r\dot{\theta}\hat{u}_\theta$. On nous donne l'expression de la fonction $\theta(t) = \theta_M \cos(\omega t)$, donc on peut la dériver : $\dot{\theta}(t) = -\theta_M\omega \sin(\omega t)$. Finalement

$$\boxed{\vec{v}(t) = -r\theta_M\omega \sin(\omega t)\hat{u}_\theta.}$$

3. Nous avons :

$$\begin{aligned} |v| &= \sqrt{v^2} \\ &= \sqrt{r^2\theta_M^2\omega^2(1 - \cos^2(\omega t))} \\ &= r\omega\theta_M\sqrt{(1 - \cos^2(\omega t))} \\ &= r\omega\theta_M\sqrt{1 - \frac{\theta^2}{\theta_M^2}} \end{aligned}$$

La vitesse du pendule est maximale pour $\theta = 0$.

4. Dans cet exercice, on a $\ddot{\theta} \neq 0$, contrairement à l'exercice 1, donc l'expression de l'accélération n'est pas la même. On dérive la vitesse, en se souvenant que $\frac{d\hat{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\hat{u}_r$, et que r , θ_M et ω sont des constantes :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = -r\theta_M\omega \sin(\omega t) \left(-\dot{\theta}\hat{u}_r \right) - r\theta_M\omega (\omega \cos(\omega t))$$

Finalement, on obtient $\boxed{\vec{a}(t) = -r\theta_M^2\omega^2 \sin(\omega t)^2\hat{u}_r - r\theta_M\omega^2 \cos(\omega t)\hat{u}_\theta.}$

L'accélération centripète est $\boxed{\vec{a}_r(t) = -r\theta_M^2\omega^2 \sin(\omega t)^2\hat{u}_r.}$

L'accélération tangentielle est

$$\boxed{\vec{a}_\theta(t) = -r\theta_M\omega^2 \cos(\omega t)\hat{u}_\theta}.$$

2 La mise en œuvre pour maîtriser l'apprentissage

Exercice 5 : Vitesse et accélération d'un corps en rotation

1. Nous savons que $\vec{v} = R\dot{\theta}\hat{u}_\theta$. Nous avons $\dot{\theta} = at$ d'où $\vec{v} = Rat\hat{u}_\theta$
2. $\dot{\theta}$ n'est pas constant. L'accélération a donc pour expression $\vec{a} = r\ddot{\theta}\hat{u}_\theta - r\dot{\theta}^2\hat{u}_r$. Nous avons $\dot{\theta} = at$ et $\ddot{\theta} = a$ d'où $\vec{a} = Ra\hat{u}_\theta - Ra^2t^2\hat{u}_r$
3. $\|\vec{a}\| = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = \sqrt{R^2a^2 + R^2a^4t^4}$

Exercice 6 : Synchrotron

1. $\forall t \in [t_1, t_2]$ et $\forall t > t_3$.
2. A t_2 . Nous avons $v = r_2\dot{\theta}_2$ donc $v = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$.
3. Dans l'anneau de rayon r_1 , nous avons $\dot{\theta}_1 = \frac{v}{r_1} = 6 \times 10^6 \text{ rad s}^{-1}$.
4. Nous avons $\dot{\theta} = at + b$ entre t_0 et t_1 où a et b sont des constantes. En utilisant le fait que $\dot{\theta}(t = t_0) = 0$ et $\dot{\theta}(t = t_1) = 6.10^6$, nous en déduisons que $\dot{\theta} = \frac{6.10^6}{t_1 - t_0}(t - t_0)$ entre t_0 et t_1 .

5. $\vec{v} = r_1 \dot{\theta} \hat{u}_\theta$ et $\vec{a} = r_1 \ddot{\theta} \hat{u}_\theta - r_1 \dot{\theta}^2 \hat{u}_r$ avec $\ddot{\theta} = \frac{6 \cdot 10^6}{t_1 - t_0}$. La partie centripète de l'accélération a pour expression $a_c = -r_1 \dot{\theta}^2 = -r_1 \left(\frac{6 \cdot 10^6}{t_1 - t_0} (t - t_0) \right)^2$.

Exercice 7 : Formule 1

On suppose que la trajectoire du pilote est circulaire pendant le virage, et que le rayon est constant. On suppose également a vitesse de la formule 1 constante. On est donc dans le cas de l'exercice 1, et l'accélération est purement centripète : sa norme est $a = \frac{v^2}{r}$ et elle est dirigée vers le centre du cercle correspondant à la trajectoire.

La vitesse est donc $v = \sqrt{ar} = \sqrt{6gr}$ puisqu'on nous dit que l'accélération vaut $6g$. Le calcul donne : $v = \sqrt{6 \times 9,81 \times 20} =$

Exercice 8 : Sonde en orbite autour de Mars

1. On est dans le même cas que l'exercice précédent, et que l'exercice 1 : la trajectoire est circulaire et la vitesse est constante. En effet, l'accélération est purement centripète puisque seule la force de gravitation s'exerce sur la sonde. On a donc à nouveau l'expression du module de l'accélération centripète : $a = \frac{v^2}{r}$. Le rayon est de la trajectoire est le rayon de Mars ajouté à l'altitude de l'orbite par rapport au sol : $r = 3400 + 280 = 3680 \text{ km} = 3,68 \times 10^6 \text{ m}$. La vitesse de la sonde est constante donc il s'agit simplement de la distance d'un tour complet divisée par le temps d'un tour complet : $v = \frac{2\pi r}{T}$, avec

$T = 113 \text{ min} = 6780 \text{ s} = 6,78 \times 10^3 \text{ s}$ la période de l'orbite.

On obtient :
$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2 r} = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{4 \times \pi^2 \times 3,68 \cdot 10^6}{(6,78 \cdot 10^3)^2} = 3,16 \text{ m/s}^2$$

2. La fréquence de rotation est l'inverse de la période :
 $f = \frac{1}{T} = 1,47 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}$.

Exercice 9 : L'accélération centripète de la lune

C'est le même principe que l'exercice précédent

Exercice 10 : Système à trois corps

- $\hat{u}_r = \cos \alpha \hat{u}_R + \sin \alpha \hat{u}_\theta$ et $\hat{u}_\alpha = -\sin \alpha \hat{u}_R + \cos \alpha \hat{u}_\theta$.
- $\frac{d \sin(\alpha)}{dt} = \cos(\alpha) \dot{\alpha}$ et $\frac{d \cos(\alpha)}{dt} = -\sin(\alpha) \dot{\alpha}$. Nous en déduisons que

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{u}_r}{dt} &= \frac{d \cos \alpha}{dt} \hat{u}_R + \cos \alpha \frac{d\hat{u}_R}{dt} + \frac{d \sin \alpha}{dt} \hat{u}_\theta + \sin(\alpha) \frac{d\hat{u}_\theta}{dt} \\ &= -\sin(\alpha) \dot{\alpha} \hat{u}_R + \cos(\alpha) \dot{\theta} \hat{u}_\theta + \cos(\alpha) \dot{\alpha} \hat{u}_\theta - \sin(\alpha) \dot{\theta} \hat{u}_R \\ &= (\dot{\alpha} + \dot{\theta}) \hat{u}_\alpha \end{aligned}$$

On suivant la même méthode nous trouvons $\frac{d\hat{u}_\alpha}{dt} = -(\dot{\alpha} + \dot{\theta}) \hat{u}_r$.

- $\vec{SL} = R\hat{u}_R + r\hat{u}_r$ d'où $\vec{v}_L = R\dot{\theta}\hat{u}_\theta + r\dot{\alpha}\hat{u}_\alpha + r\dot{\theta}\hat{u}_\alpha$.
- $\vec{v}_L = R\dot{\theta}\hat{u}_\theta + r(\dot{\alpha} + \dot{\theta})(-\sin \alpha \hat{u}_R + \cos \alpha \hat{u}_\theta)$.
- Nous considérons les orbites circulaires uniformes, nous avons donc $\vec{a}_L = -R\dot{\theta}^2 \hat{u}_R - r(\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2 \hat{u}_r$ d'où :
 $\vec{a}_L = -R\dot{\theta}^2 \hat{u}_R - r(\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2 (\cos \alpha \hat{u}_R + \sin \alpha \hat{u}_\theta)$
- $\alpha = (2n + 1)\pi$ avec $n = 0, 1, 2, \dots$

7. Nous avons alors $\vec{v}_L = R\dot{\theta}\hat{u}_\theta - r(\dot{\alpha} + \dot{\theta})\hat{u}_\theta$. La direction du vecteur vitesse suivant \hat{u}_θ est cohérente avec la position de la Lune puisque sa vitesse est dans la direction \hat{u}_θ lorsque la lune est entre la Terre et le Soleil. Nous avons $\vec{a}_L = -R\dot{\theta}^2\hat{u}_R + r(\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2\hat{u}_R$. La direction du vecteur accélération est bien suivant la direction de la force.