Mécanique
Acquis d'apprentissage n°5 : Mouvement de rotation - solution

1 Les savoir-faire à connaître

Exercice 1 : Mouvement circulaire uniforme

1. On dérive le vecteur $\overrightarrow{OM}(t)$ avec $r = cst$, nous avons donc : $\overrightarrow{v}(t) = r\frac{d\hat{u}_r}{dt} = \dot{r}\hat{u}_r + r\dot{\theta}\hat{u}_\theta$. On a utilisé le fait que $\frac{d\hat{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\hat{u}_\theta$, le point au-dessus d'une variable signifiant une dérivée par rapport au temps. De plus $\dot{r} = 0$ car le rayon r de la trajectoire est constant donc sa dérivée est nulle. Finalement on a $\boxed{\overrightarrow{v}(t) = r\dot{\theta}\hat{u}_\theta}$.
2. On dérive à nouveau avec $\dot{\theta} = cst$ pour obtenir $\boxed{\overrightarrow{a}(t) = -r\dot{\theta}^2\hat{u}_r}$. L'accélération est dirigée vers l'origine du repère, $\boxed{\text{il s'agit de l'accélération centripète}}$.
3. On a vu que $v = r\dot{\theta}$, donc $\dot{\theta} = \frac{v}{r}$. Le module de l'accélération est $a = ||\overrightarrow{a}|| = r\dot{\theta}^2 = r\frac{v^2}{r^2}$. L'accélération centripète s'exprime ainsi : $\boxed{a = \frac{v^2}{r}}$. Puisque v et r sont des constantes, l'accélération est constante.
4. On nous donne la vitesse $v = 80\,\mathrm{km\,h^{-1}} = 22{,}2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, et le rayon de la trajectoire $r = 500\,\mathrm{m}$. L'accélération vaut donc $\boxed{a = \frac{v^2}{r} = \frac{22{,}2^2}{500} = 0{,}99\,\mathrm{m\,s^{-2}}}$.
5. La fréquence de rotation (nombre de tours de circuit par seconde, en $\mathrm{s^{-1}}$) est l'inverse de la période de rotation (temps pour faire un tour complet, en s) : $f = \frac{1}{T}$. La vitesse de déplacement est v et la distance parcourue est un tour complet : distance $= 2\pi r$, on a donc : $v = \frac{2\pi r}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi r}{v} \Rightarrow f = \frac{v}{2\pi r}$. Or, $v = r\dot{\theta}$, donc $\boxed{f = \frac{\dot{\theta}}{2\pi}}$. La valeur de la fréquence est : $\boxed{f = \frac{v}{2\pi r} = \frac{22{,}2}{2\times\pi\times 500} = 0{,}0071\,\mathrm{s^{-1}}}$. Cela signifie qu'en une seconde, la voiture parcourt $0{,}71\,\%$ d'un tour complet. On peut aussi calculer $T = 141\,\mathrm{s}$, et on trouve que la voiture fait un tour complet en 141 s.

Exercice 2 : Mouvement circulaire

1. τ est en secondes car il ne doit pas y avoir d'unité dans l'argument de la fonction exponentielle.
2. $v = r\dot{\theta}$ d'où $\dot{\theta} = \frac{v_0}{r}(1 - e^{-t/\tau})$.
3. $\theta = \frac{v_0}{r}(t + \tau e^{-t/\tau}) + cst$. Or $\theta(t = 0) = 0$ d'après l'énoncé. On en déduit que $\frac{v_0}{r}\tau + cst = 0$ d'où $\theta = \frac{v_0}{r}(t + \tau e^{-t/\tau} - \tau)$.
4. On dérive la vitesse en faisant attention au fait que $\dot{\theta}$ dépend du temps. Nous obtenons donc $\vec{a} = r\frac{d(\dot{\theta}\hat{u}_\theta)}{dt} = r\ddot{\theta}\hat{u}_\theta + r\dot{\theta}\frac{d\hat{u}_\theta}{dt} = r\ddot{\theta}\hat{u}_\theta - r\dot{\theta}^2\hat{u}_r$
5. On injecte l'expression de $\dot{\theta}$ et l'expression de $\ddot{\theta}$ dans l'expression de l'accélération pour obtenir $\vec{a} = \frac{v_0}{\tau}e^{-t/\tau}\hat{u}_\theta - \frac{v_0^2}{r}(1 - e^{-t/\tau})^2\hat{u}_r$.

6. $e^{-t/\tau} \to +\infty$ pour $t \to +\infty$. Nous obtenons donc $\vec{v} = v_0\widehat{u}_\theta$ et $\vec{a} = -\frac{v_0^2}{r}\widehat{u}_r$. Le mouvement est alors circulaire uniforme.
7. Nous nous plaçons dans le cas de la question précédente donc dans un mouvement circulaire uniforme. Nous avons donc $T = \frac{2\pi r}{v_0}$.

Exercice 3 : Trajectoire de la Terre

1. Il ne faut pas oublier de dériver le vecteur unitaire : il tourne de 90° et un $\dot{\theta}$ apparaît : $\boxed{\overrightarrow{v}(t) = \frac{dr}{dt}\hat{u}_r + r\frac{d\hat{u}_r}{dt} = \frac{d\overrightarrow{ST}(t)}{dt} = \dot{r}(t)\hat{u}_r + r(t)\dot{\theta}\hat{u}_\theta}$.
2. On dérive à nouveau : $\overrightarrow{a}(t) = \frac{d\overrightarrow{v}(t)}{dt} = \ddot{r}(t)\hat{u}_r + \dot{r}(t)\frac{d\hat{u}_r}{dt} + \dot{r}(t)\dot{\theta}\hat{u}_\theta + r(t)\ddot{\theta}\hat{u}_\theta + r(t)\dot{\theta}\frac{d\hat{u}_\theta}{dt}$.
$\overrightarrow{a}(t) = \ddot{r}(t)\hat{u}_r + \dot{r}(t)\dot{\theta}\hat{u}_\theta + \dot{r}(t)\dot{\theta}\hat{u}_\theta + r(t)\ddot{\theta}\hat{u}_\theta - r(t)\dot{\theta}^2\hat{u}_r$
$\boxed{\overrightarrow{a}(t) = \left(\ddot{r}(t) - r(t)\dot{\theta}^2\right)\hat{u}_r + \left(2\dot{r}(t)\dot{\theta} + r(t)\ddot{\theta}\right)\hat{u}_\theta}$.
On peut vérifier que chaque terme est bien homogène à une accélération ($\mathrm{m\,s^{-2}}$).
3. La composante centripète est la composante selon $\hat{u}_r$, soit $\boxed{\overrightarrow{a}_r(t) = \left(\ddot{r}(t) - r(t)\dot{\theta}^2\right)\hat{u}_r}$.

   La composante tangentielle est la composante selon $\hat{u}_\theta$, soit $\boxed{\overrightarrow{a}_\theta(t) = \left(2\dot{r}(t)\dot{\theta} + r(t)\ddot{\theta}\right)\hat{u}_\theta}$.

Exercice 4 : Mouvement d'un pendule

1. Nous avons $\theta(t) = \theta_M\cos(\omega t)$. Le pendule part donc de θ_M et il revient à θ_M au bout du temps T qui correspond à $\cos(\omega T) = 1$ soit $\omega T = 2\pi$. Nous avons donc $T = \frac{2\pi}{\omega}$.
2. Comme vu à l'exercice 1, $\overrightarrow{v}(t) = r\dot{\theta}\hat{u}_\theta$. On nous donne l'expression de la fonction $\theta(t) = \theta_M\cos(\omega t)$, donc on peut la dériver : $\dot{\theta}(t) = -\theta_M\omega\sin(\omega t)$. Finalement $\boxed{\overrightarrow{v}(t) = -r\theta_M\omega\sin(\omega t)\hat{u}_\theta}$.
3. Nous avons :

$$\begin{aligned}
|v| &= \sqrt{v^2} \\
&= \sqrt{r^2\theta_M^2\omega^2(1-\cos^2(\omega t))} \\
&= r\omega\theta_M\sqrt{(1-\cos^2(\omega t))} \\
&= r\omega\theta_M\sqrt{1-\frac{\theta^2}{\theta_M^2}}
\end{aligned}$$

   La vitesse du pendule est maximale pour $\theta = 0$.
4. Dans cet exercice, on a $\ddot{\theta} \neq 0$, contrairement à l'exercice 1, donc l'expression de l'accélération n'est pas la même. On dérive la vitesse, en se souvenant que $\frac{d\hat{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\hat{u}_r$, et que r, θ_M et ω sont des constantes : $\overrightarrow{a}(t) = \frac{d\overrightarrow{v}(t)}{dt} = -r\theta_M\omega\sin(\omega t)\left(-\dot{\theta}\hat{u}_r\right) - r\theta_M\omega\left(\omega\cos(\omega t)\right)\hat{u}_\theta$.
Finalement, on obtient $\boxed{\overrightarrow{a}(t) = -r\theta_M^2\omega^2\sin(\omega t)^2\hat{u}_r - r\theta_M\omega^2\cos(\omega t)\hat{u}_\theta}$. L'accélération centripète est $\boxed{\overrightarrow{a}_r(t) = -r\theta_M^2\omega^2\sin(\omega t)^2\hat{u}_r}$. L'accélération tangentielle est $\boxed{\overrightarrow{a}_\theta(t) = -r\theta_M\omega^2\cos(\omega t)\hat{u}_\theta}$.

2 La mise en œuvre pour maîtriser l'apprentissage

Exercice 5 : Vitesse et accélération d'un corps en rotation

1. Nous savons que $\vec{v} = R\dot{\theta}\widehat{u}_\theta$. Nous avons $\dot{\theta} = at$ d'où $\vec{v} = Rat\widehat{u}_\theta$
2. $\dot{\theta}$ n'est pas constant. L'accélération a donc pour expression $\vec{a} = r\ddot{\theta}\widehat{u}_\theta - r\dot{\theta}^2\widehat{u}_r$. Nous avons $\dot{\theta} = at$ et $\ddot{\theta} = a$ d'où $\vec{a} = Ra\widehat{u}_\theta - Ra^2t^2\widehat{u}_r$
3. $||\vec{a}|| = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = \sqrt{R^2a^2 + R^2a^4t^4}$

Exercice 6 : Synchrotron

1. $\forall t \in [t_1, t_2]$ et $\forall t > t_3$.
2. A t_2. Nous avons $v = r_2\dot{\theta}_2$ donc $v = 3 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.
3. Dans l'anneau de rayon r_1, nous avons $\dot{\theta}_1 = \frac{v}{r_1} = 6 \times 10^6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
4. Nous avons $\dot{\theta} = at + b$ entre t_0 et t_1 où a et b sont des constantes. En utilisant le fait que $\dot{\theta}(t = t_0) = 0$ et $\dot{\theta}(t = t_1) = 6.10^6$, nous en déduisons que $\dot{\theta} = \frac{6.10^6}{t_1 - t_0}(t - t_0)$ entre t_0 et t_1.
5. $\vec{v} = r_1\dot{\theta}\widehat{u}_\theta$ et $\vec{a} = r_1\ddot{\theta}\widehat{u}_\theta - r_1\dot{\theta}^2\widehat{u}_r$ avec $\ddot{\theta} = \frac{6.10^6}{t_1 - t_0}$. La partie centripète de l'accélération a pour expression $a_c = -r_1\dot{\theta}^2 = -r_1\left(\frac{6.10^6}{t_1 - t_0}(t - t_0)\right)^2$.

Exercice 7 : Formule 1

On suppose que la trajectoire du pilote est circulaire pendant le virage, et que le rayon est constant. On suppose également a vitesse de la formule 1 constante. On est donc dans le cas de l'exercice 1, et l'accélération est purement centripète : sa norme est $a = \frac{v^2}{r}$ et elle est dirigée vers le centre du cercle correspondant à la trajectoire.
La vitesse est donc $v = \sqrt{ar} = \sqrt{6gr}$ puisqu'on nous dit que l'accélération vaut $6g$. Le calcul donne : $\boxed{v = \sqrt{6 \times 9{,}81 \times 20} = 34\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 124\,\mathrm{km\,h^{-1}}}$.

Exercice 8 : Sonde en orbite autour de Mars

1. On est dans le même cas que l'exercice précédent, et que l'exercice 1 : la trajectoire est circulaire et la vitesse est constante. En effet, l'accélération est purement centripète puisque seule la force de gravitation s'exerce sur la sonde. On a donc à nouveau l'expression du module de l'accélération centripète : $a = \frac{v^2}{r}$. Le rayon est de la trajectoire est le rayon de Mars ajouté à l'altitude de l'orbite par rapport au sol : $r = 3400 + 280 = 3680\,\mathrm{km} = 3{,}68 \times 10^6\,\mathrm{m}$. La vitesse de la sonde est constante donc il s'agit simplement de la distance d'un tour complet divisée par le temps d'un tour complet : $v = \frac{2\pi r}{T}$, avec $T = 113\,\mathrm{min} = 6780\,\mathrm{s} = 6{,}78 \times 10^3\,\mathrm{s}$ la période de l'orbite.
   On obtient : $\boxed{a = \frac{v^2}{r} = \frac{4\pi^2r^2}{T^2r} = \frac{4\pi^2r}{T^2} = \frac{4\times\pi^2\times3{,}68\cdot10^6}{(6{,}78\cdot10^3)^2} = 3{,}16\,\mathrm{m\,s^{-2}}}$.
2. La fréquence de rotation est l'inverse de la période : $f = \frac{1}{T} = 1{,}47 \times 10^{-4}\,\mathrm{s^{-1}}$.

Exercice 9 : L'accélération centripète de la lune

C'est le même principe que l'exercice précédent

Exercice 10 : Système à trois corps

1. $\widehat{u}_r = \cos\alpha\widehat{u}_R + \sin\alpha\widehat{u}_\theta$ et $\widehat{u}_\alpha = -\sin\alpha\widehat{u}_R + \cos\alpha\widehat{u}_\theta$.
2. $\frac{d\sin(\alpha)}{dt} = \cos(\alpha)\dot{\alpha}$ et $\frac{d\cos(\alpha)}{dt} = -\sin(\alpha)\dot{\alpha}$. Nous en déduisons que

$$\begin{aligned}\frac{d\widehat{u}_r}{dt} &= \frac{d\cos\alpha}{dt}\widehat{u}_R + \cos\alpha\frac{d\widehat{u}_R}{dt} + \frac{d\sin\alpha}{dt}\widehat{u}_\theta + \sin(\alpha)\frac{d\widehat{u}_\theta}{dt}\\ &= -\sin(\alpha)\dot{\alpha}\widehat{u}_R + \cos(\alpha)\dot{\theta}\widehat{u}_\theta + \cos(\alpha)\dot{\alpha}\widehat{u}_\theta - \sin(\alpha)\dot{\theta}\widehat{u}_R\\ &= (\dot{\alpha} + \dot{\theta})\widehat{u}_\alpha\end{aligned}$$

   On suivant la même méthode nous trouvons $\frac{d\widehat{u}_\alpha}{dt} = -(\dot{\alpha} + \dot{\theta})\widehat{u}_r$.
3. $\overrightarrow{SL} = R\widehat{u}_R + r\widehat{u}_r$ d'où $\vec{v}_L = R\dot{\theta}\widehat{u}_\theta + r\dot{\alpha}\widehat{u}_\alpha + r\dot{\theta}\widehat{u}_\alpha$.
4. $\vec{v}_L = R\dot{\theta}\widehat{u}_\theta + r(\dot{\alpha} + \dot{\theta})(-\sin\alpha\widehat{u}_R + \cos\alpha\widehat{u}_\theta)$.
5. Nous considérons les orbites circulaires uniformes, nous avons donc $\vec{a}_L = -R\dot{\theta}^2\widehat{u}_R - r(\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2\widehat{u}_r$ d'où : $\vec{a}_L = -R\dot{\theta}^2\widehat{u}_R - r(\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2(\cos\alpha\widehat{u}_R + \sin\alpha\widehat{u}_\theta)$
6. $\alpha = (2n + 1)\pi$ avec $n = 0, 1, 2, ...$
7. Nous avons alors $\vec{v}_L = R\dot{\theta}\widehat{u}_\theta - r(\dot{\alpha} + \dot{\theta})\widehat{u}_\theta$. La direction du vecteur vitesse suivant $\widehat{u}_\theta$ est cohérente avec la position de la Lune puisque sa vitesse est dans la direction $\widehat{u}_\theta$ lorsque la lune est entre la Terre et le Soleil. Nous avons $\vec{a}_L = -R\dot{\theta}^2\widehat{u}_R + r(\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2\widehat{u}_R$. La direction du vecteur accélération est bien suivant la direction de la force.