Mécanique
Acquis d'apprentissage n°5 : Mouvements de rotation et d'oscillation

Consignes : Justifier toutes les réponses. Une réponse correcte non justifiée est considérée comme fausse en devoir. Soigner la rédaction des réponses et respecter les notations de l'énoncé. Une réponse qui utilise une autre notation est considérée comme fausse en devoir.

Cette série d'exercices doit vous permettre de maîtriser les savoir-faire suivants :

1. Savoir étudier un mouvement circulaire uniforme.
2. Savoir étudier un mouvement circulaire non uniforme.
3. Savoir étudier un mouvement de rotation.
4. Savoir étudier un mouvement d'oscillation dans un repère polaire.

---

les dérivées des vecteurs unitaires d'un repère polaire pour calculer la vitesse et l'accélération d'un mouvement.

1 Les savoir-faire à connaître

Savoir étudier un mouvement circulaire uniforme

Notion de cours à connaître : dans un repère polaire, la dérivée des vecteurs unitaires a pour expression $\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$ et $\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{u}_r$.

Exercice 1 : Mouvement circulaire uniforme

On considère une voiture en mouvement circulaire uniforme de vitesse scalaire v sur un circuit circulaire de rayon r (voir figure 1). On note $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$ le vecteur position de la voiture.

1. Montrer que le vecteur vitesse de la voiture a pour expression $\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$.
2. Déterminer l'expression du vecteur accélération de la voiture. Comment-se-nomme cette accélération ?
3. Montrer l'expression du module de l'accélération peut s'écrire $||\vec{a}|| = \frac{v^2}{r}$.
4. La voiture roule à $80\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ sur un circuit de $500\,\mathrm{m}$ de rayon. Calculer la valeur de l'accélération de la voiture.
5. Montrer que la voiture met $T = 141\,\mathrm{s}$ pour faire un tour de circuit. En déduire la valeur de la fréquence de rotation de la voiture.

Outil mathématique à utiliser : vous devez connaître l'expression du périmètre d'un cercle de rayon r.

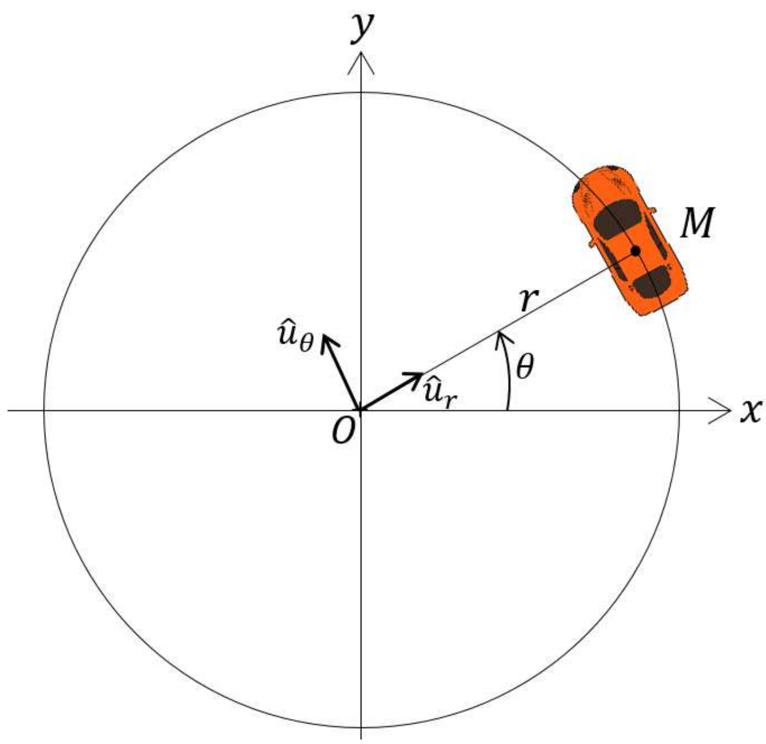


FIGURE 1 – Voiture en mouvement circulaire uniforme.

Savoir étudier un mouvement circulaire non uniforme

Exercice 2 : Mouvement circulaire

On considère une voiture en mouvement circulaire de vitesse v sur un circuit circulaire de rayon r (voir figure 1). On note $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$ le vecteur position de la voiture. Nous supposons que la voiture est phase d'accélération et que la norme de sa vitesse a pour expression $v = v_0(1 - e^{-t/\tau})$ où τ est une constante.

1. Quelle est l'unité de τ dans le système international d'unités ?
2. Montrer que $\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$. En déduire l'expression de $\dot{\theta}$ en fonction de r, v_0, τ et t.
3. Montrer que θ a pour expression $\theta = \frac{v_0}{r}(t + \tau e^{-t/\tau} - \tau)$ si $\theta(t=0) = 0$.

   Outil mathématique à utiliser : vous devez utiliser la primitive de la fonction $f(x) = e^{ax}$ qui a pour expression $F(x) = \frac{e^{ax}}{a}$ si a est une constante.
4. Montrer que le vecteur accélération de la voiture a pour expression $\vec{a} = r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - r\dot{\theta}^2\vec{u}_r$.
5. En déduire que l'accélération a pour expression $\vec{a} = \frac{v_0}{\tau}e^{-t/\tau}\vec{u}_\theta - \frac{v_0^2}{r}(1 - e^{-t/\tau})^2\vec{u}_r$.
6. Déterminer l'expression du vecteur vitesse et du vecteur accélération pour $t \to +\infty$. Comment qualifier le mouvement de la voiture dans ce cas ?
7. Déterminer l'expression du temps mis par la voiture pour faire un tour complet dans le cas de la question précédent. Calculer numériquement ce temps si la voiture roule à $80\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ sur un circuit de $500\,\mathrm{m}$ de rayon.

Savoir étudier un mouvement de rotation

Exercice 3 : Trajectoire de la Terre

La trajectoire de la Terre autour du Soleil n'est pas circulaire, c'est une ellipse. Ainsi, la distance r qui sépare la Terre du Soleil varie au cours du temps. Le vecteur position de la Terre a donc pour expression $\overrightarrow{ST}(t) = r(t)\vec{u}_r$.

1. Déterminer l'expression du vecteur vitesse de la Terre.
2. Montrer que le vecteur accélération de la Terre a pour expression $\vec{a}(t) = \left(\ddot{r}(t) - r(t)\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r + \left(2\dot{r}(t)\dot{\theta} + r(t)\ddot{\theta}\right)\vec{u}_\theta$
3. Quelle est l'expression de la composante centripète et tangentielle de l'accélération ?

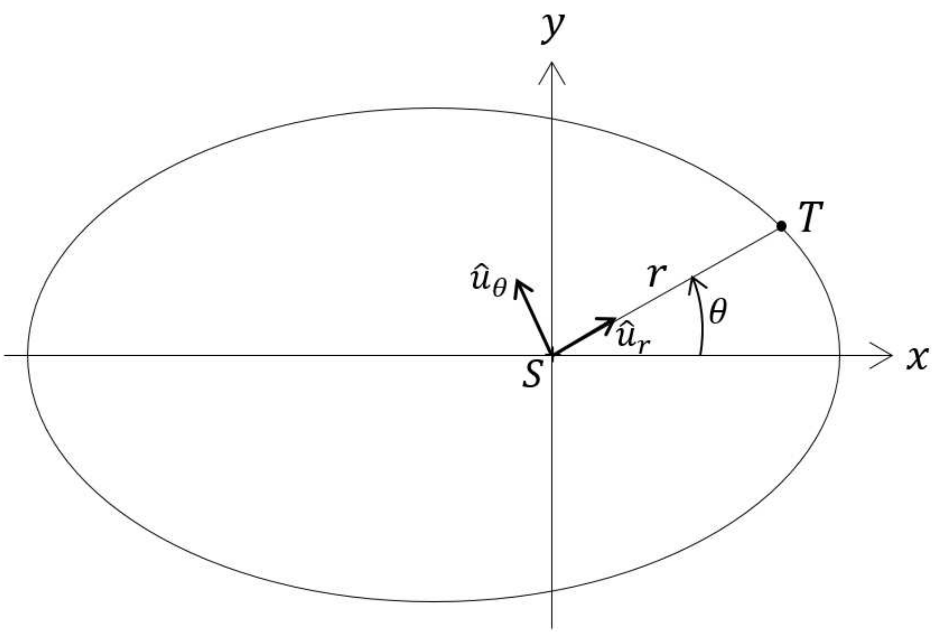


FIGURE 2 – Trajectoire d'une planète autour de son étoile.

Savoir étudier un mouvement d'oscillation dans un repère polaire.

Exercice 4 : Mouvement d'un pendule

Nous nous intéressons dans cette section à un pendule simple (la masse de la liaison est négligeable devant la valeur de la masse qui oscille) qui oscille aux petits angles sans frottement et est lâché à $t = 0$ sans vitesse d'un angle θ_M positif par rapport à la verticale. L'équation horaire de l'angle θ est alors donnée par $\theta(t) = \theta_M \cos(\omega t)$ où ω est une constante (voir figure 3).

1. Montrer que le temps que met le pendule pour revenir à son point de départ a pour expression $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

   Outil mathématique à utiliser : vous devez utiliser la périodicité de la fonction cosinus.

2. Montrer que le vecteur vitesse du pendule a pour expression $\vec{v}(t) = -r\theta_M\omega\sin(\omega t)\vec{u}_\theta$

3. En déduire que $|v| = r\omega\theta_M\sqrt{1-\frac{\theta^2}{\theta_M^2}}$.Pour quelle valeur de θ le pendule atteint t-il sa vitesse scalaire maximale ?

   Outil mathématique à utiliser : la valeur absolue d'une variable x est donnée par $|x| = \sqrt{x^2}$.

4. Montrer que le vecteur accélération a pour expression $\vec{a}(t) = -r\theta_M^2\omega^2\sin(\omega t)^2\vec{u}_r - r\theta_M\omega^2\cos(\omega t)\vec{u}_\theta$. Quelles sont les expressions des

composantes centripète et tangentielle de l'accélération ?

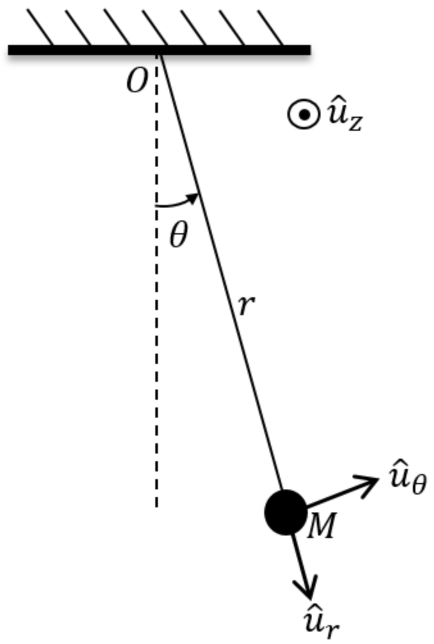


FIGURE 3 – Pendule en oscillation.

2 La mise en œuvre pour maîtriser l'apprentissage

Exercice 5 : Vitesse et accélération d'un corps en rotation

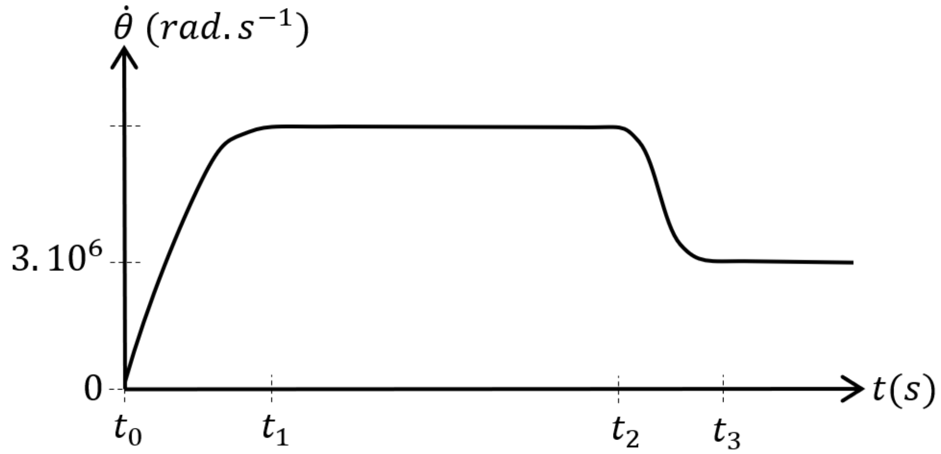
Imaginons un corps qui se déplace le long d'un cercle de rayon R. L'angle θ qui sert à repérer la position du corps en coordonnées polaires a pour expression $\theta = \frac{1}{2}at^2 + b$ où a et b sont des constantes.

1. Déterminer l'expression du vecteur vitesse du corps en fonction des paramètres du problème.

2. Montrer que le vecteur accélération du corps a pour expression $\vec{a} = Ra\vec{u}_\theta - Ra^2t^2\vec{u}_r$
3. Déterminer l'expression de la norme du vecteur accélération.

Exercice 6 : Synchrotron

La figure suivante montre la vitesse angulaire d'un paquet d'électrons dans un synchrotron. Les électrons sont accélérés quasiment à la vitesse de la lumière puis injectés dans un premier anneau de rayon $r_1 = 50\,\text{m}$ avant d'être injectés dans l'anneau de stockage de rayon $r_2 = 100\,\text{m}$.



1. Déterminer les intervalles de temps pour lesquels le mouvement des électrons est un mouvement circulaire uniforme.
2. A quel moment les électrons sont-ils injectés dans l'anneau de stockage ? Calculer la valeur de la vitesse des électrons à partir de la valeur de $\dot{\theta}$ indiquée sur le graphe.
3. Calculer la vitesse angulaire des électrons dans l'anneau de rayon r_1.

4. La vitesse angulaire des électrons augmente linéairement entre t_0 et t_1. Montrer que la vitesse angulaire des électrons a pour expression $\dot{\theta} = \frac{6.10^6}{t_1 - t_0}(t - t_0)$ entre t_0 et t_1.
5. En déduire l'expression du vecteur accélération des électrons dans un repère polaire entre t_0 et t_1. Quelle est l'expression de l'accélération centripète ?

Exercice 7 : Formule 1

Un pilote de formule 1 peut subir une accélération de 6 g lors d'un virage très serré de 20 m de rayon de courbure. Calculer la vitesse de la formule 1 dans ce cas.

Exercice 8 : Sonde en orbite autour de Mars

La sonde Mars Reconnaissance Orbiter est en orbite circulaire uniforme autour de la planète Mars à 280 km d'altitude. Le rayon de Mars est de 3400 km. La sonde met 113 min pour parcourir une orbite complète.

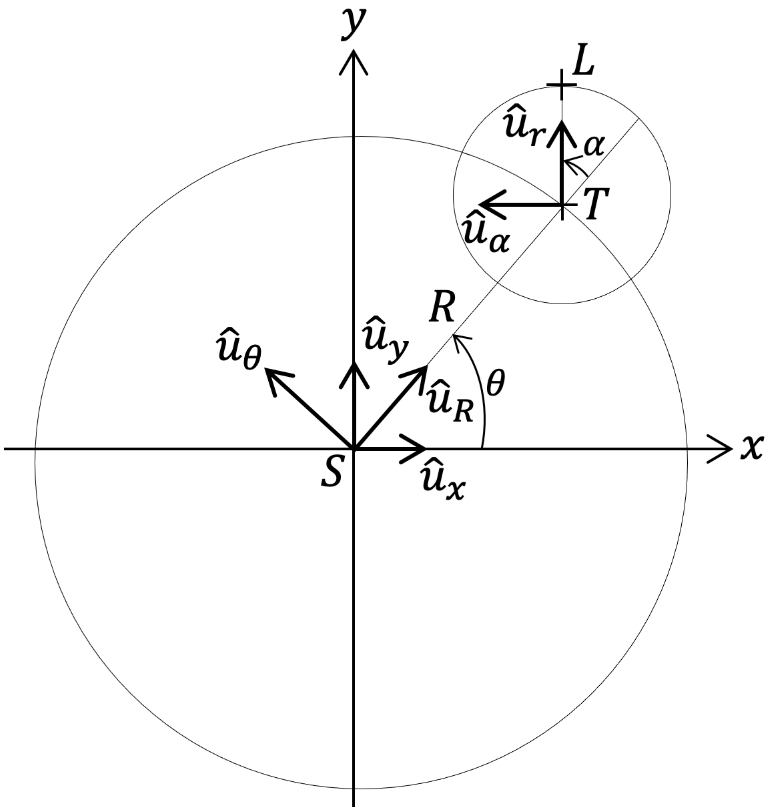
1. Calculer le module de l'accélération centripète de la sonde.
2. Calculer la fréquence de rotation de la sonde.

Exercice 9 : L'accélération centripète de la lune

La lune tourne autour de la Terre en 27,3 jours sur une orbite de 384 000 km de rayon. Quel est le module de l'accélération centripète associée au mouvement de la Lune autour de la Terre ?

Exercice 10 : Système à trois corps

La figure suivante montre schématiquement les positions du Soleil en S, de la Terre en T et de la Lune en L à un instant donné. Nous considérons que la Terre est en orbite circulaire uniforme autour du Soleil et que la Lune est en orbite circulaire uniforme autour de la Terre. Nous notons R la distance Soleil-Terre et r la distance Terre-Lune.



Nous connaissons les expressions des dérivées des vecteurs unitaires $\vec{u}_R$ et $\vec{u}_\theta$. Nous devons chercher les dérivées des vecteurs unitaires $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\alpha$.

1. Exprimer les vecteurs unitaires $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\alpha$ en fonction de $\vec{u}_R$, $\vec{u}_\theta$, $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$.
2. On rappelle que $\frac{d\sin(\alpha)}{dt} = \cos(\alpha)\dot{\alpha}$ et $\frac{d\cos(\alpha)}{dt} = -\sin(\alpha)\dot{\alpha}$. En déduire que $\frac{d\vec{u}_r}{dt} = (\dot{\alpha}+\dot{\theta})\vec{u}_\alpha$ et $\frac{d\vec{u}_\alpha}{dt} = -(\dot{\alpha}+\dot{\theta})\vec{u}_r$.

3. Déterminer, en utilisant le fait que $\overrightarrow{SL} = \overrightarrow{ST} + \overrightarrow{TL}$, l'expression du vecteur vitesse de la Lune en fonction de R, $\dot{\theta}$, r, $\dot{\alpha}$, $\vec{u}_\alpha$ et $\vec{u}_\theta$.
4. En déduire l'expression du vecteur vitesse de la Lune en fonction de R, $\dot{\theta}$, r, $\dot{\alpha}$, $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_R$.
5. Utiliser la même méthode pour déterminer l'expression du vecteur l'accélération de la Lune en fonction de R, $\dot{\theta}$, r, $\dot{\alpha}$, $\sin(\alpha)$, $\cos(\alpha)$, $\vec{u}_\theta$ et $\vec{u}_R$.
6. Pour quelles valeurs de α la Lune est-elle entre le Soleil et la Terre ?
7. En déduire l'expression des vecteurs vitesse et accélération de la Lune à ces différentes valeurs de α. Est-ce que la direction des vecteurs sont cohérentes ?