# Mécanique
# Acquis d'apprentissage n°4 : La chute libre à deux dimensions - solution

## 1 Les savoir-faire à connaître

### Exercice 1 : Lancer de balle

1. La seule force s'exerçant sur la balle en l'air est son poids car il n'y a pas de frottements. L'accélération est donc constante et égale à l'accélération de la pesanteur : $\boxed{\overrightarrow{a}(t) = \overrightarrow{g} = -g\hat{u}_y}$.
2. Connaissant l'accélération de la balle, on peut déterminer sa vitesse en intégrant : $\overrightarrow{v}(t) = -gt\hat{u}_y + \overrightarrow{\text{constante}}$. On peut calculer la vitesse à $t = 0$ pour trouver la constante : $\overrightarrow{v}(t = 0) = (-g \times 0)\hat{u}_y + \overrightarrow{\text{constante}} = \overrightarrow{\text{constante}}$. Or la vitesse initiale est notée $\overrightarrow{v_0}$ dans l'énoncé, donc $\overrightarrow{\text{constante}} = \overrightarrow{v_0}$. Projetons ce vecteur sur les axes $Ox$ et $Oy$ : $\overrightarrow{v_0} = v_0 \cos(\alpha)\hat{u}_x + v_0 \sin(\alpha)\hat{u}_y$. Finalement on a $\overrightarrow{v}(t) = v_0 \cos(\alpha)\hat{u}_x + (v_0 \sin(\alpha) - gt)\hat{u}_y$.
   À partir de la vitesse on peut maintenant calculer la position en intégrant à nouveau. On peut réaliser

l'étude séparément suivant $Ox$ et suivant $Oy$ pour simplifier.
D'abord suivant $Ox$ : la vitesse vaut $v_x(t) = v_0 \cos(\alpha)$ (tous les autres termes sont suivant $Oy$). On a donc une vitesse constante suivant $Ox$. L'intégration donne $x(t) = v_0 \cos(\alpha)t +$ constante. Regardons les conditions initiales pour trouver la constante d'intégration : à $t = 0$ la balle est en $x = 0$, donc $x(t = 0) = 0$ $\Rightarrow v_0 \cos(\alpha) \times 0 + \text{constante} = 0 \Rightarrow \text{constante} = 0$. Finalement $\boxed{x(t) = v_0 \cos(\alpha)t}$.
Maintenant suivant $Oy$ : la vitesse vaut $v_y(t) = v_0 \sin(\alpha) - gt$. L'intégration donne : $y(t) = v_0 \sin(\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 +$ constante. La condition initiale est $y(t = 0) = h$, ce qui implique $v_0 \sin(\alpha) \times 0 - \frac{1}{2}g \times 0^2 + \text{constante} = h$, donc constante $= h$. Finalement, $\boxed{y(t) = v_0 \sin(\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 + h}$.

3. Si $h = 0$, seule l'expression de $y(t)$ est impactée. On a : $\boxed{y(t) = v_0 \sin(\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2}$.
4. Si $\alpha = 0$, la vitesse et la position vont être modifiées. On aura : $\cos(\alpha) = 1$ et $\sin(\alpha) = 0$. Ainsi, $\boxed{\vec{v}(t) = v_0\hat{u}_x - gt\hat{u}_y}$, $\boxed{x(t) = v_0 t}$ et $\boxed{y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h}$.
5. On se place dans le cas $\alpha = 0$ et $h \neq 0$. On a donc $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h$. On veut déterminer le temps $t_s$ pour lequel la balle touche le sol, autrement dit quand $y(t_s) = 0$. Résolvons l'équation : $y(t_s) = 0$ $\Rightarrow -\frac{1}{2}gt_s^2 + h = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}gt_s^2 = h \Rightarrow t_s^2 = \frac{2h}{g} \Rightarrow$ $t_s = \pm\sqrt{\frac{2h}{g}}$. Il y a deux solutions puisqu'il s'agit d'un équation du second degré. La solution de temps

négatif n'a pas de sens ici puisqu'on étudie le système à partir de $t = 0$, on ne garde donc que la solution positive : $\boxed{t_s = \sqrt{\frac{2h}{g}}}$.

6. Même logique mais avec $\alpha \neq 0$ et $h = 0$. On a donc $y(t) = v_0 \sin(\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$. Résolvons l'équation $y(t_s) = 0$ : $v_0 \sin(\alpha)t_s - \frac{1}{2}gt_s^2 = 0$. Une solution évidente est $t = 0$, mais elle ne nous intéresse pas puisqu'il s'agit de la condition initiale. On peut donc chercher une solution $t_s \neq 0$ et diviser l'équation par $t_s$ : $v_0 \sin(\alpha) - \frac{1}{2}gt_s = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}gt_s = v_0 \sin(\alpha)$, donc $\boxed{t_s = \frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g}}$.
On cherche maintenant l'angle $\alpha$ qui maximise $t_s$. On cherche un maximum de la fonction $t_s(\alpha) = \frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g}$. Un maximum correspond à une annulation de la dérivée donc cherchons à résoudre $\frac{dt_s(\alpha)}{d\alpha} = 0$. Ceci donne l'équation : $\frac{2v_0 \cos(\alpha)}{g} = 0$ puisque la dérivée de sin est cos. On a donc $\cos(\alpha) = 0$, ce qui donne $\boxed{\alpha = \frac{\pi}{2}}$. Il faut donc lancer la balle verticalement vers le haut pour maximiser le temps avant qu'elle touche le sol, ce qui paraît logique.

## Exercice 2 : Lancer de balle 2

1. L'équation de la trajectoire, c'est l'équation décrivant le tracé dans le plan $Oxy$ du déplacement de la balle. Il s'agit donc de l'équation de la fonction $y(x)$. Prenons $x(t)$ et $y(t)$ de l'exercice précédent : $x(t) = v_0 \cos(\alpha)t$ et $y(t) = v_0 \sin(\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 + h$. Une mé-

thode est d'exprimer $t$ en fonction de $x$, puis de remplacer $t$ par son expression en fonction de $x$ dans l'expression de $y$, ce qui nous donnera $y(x)$.
D'abord il nous faut $t$ en fonction de $x$ : $x(t) = v_0 \cos(\alpha)t \Rightarrow t(x) = \frac{x}{v_0 \cos(\alpha)}$.
Remplaçons $t$ par $\frac{x}{v_0 \cos(\alpha)}$ dans l'équation $y(t)$ : $y(x) = v_0 \sin(\alpha)\frac{x}{v_0 \cos(\alpha)} - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0 \cos(\alpha)}\right)^2 + h$, on obtient alors $\boxed{y(x) = \tan(\alpha)x - \frac{g}{2v_0^2 \cos(\alpha)^2}x^2 + h}$.

2. Si $h = 0$, l'équation précédente devient $y(x) = \tan(\alpha)x - \frac{g}{2v_0^2 \cos(\alpha)^2}x^2$. La distance maximale est atteinte quand la balle a touché le sol à la fin de son mouvement, soit quand $y = 0$. On peut donc résoudre l'équation $y(x) = 0$ pour trouver la solution. L'équation s'écrit $y(x_s) = \tan(\alpha)x_s - \frac{g}{2v_0^2 \cos(\alpha)^2}x_s^2 = 0$.
Une solution évidente est $x = 0$ mais il s'agit du point de départ donc on peut l'ignorer et chercher une solution $x_s \neq 0$, donc on peut diviser l'équation par $x_s$ et on obtient $y(x_s) = \tan(\alpha) - \frac{g}{2v_0^2 \cos(\alpha)^2}x_s = 0$ $\Rightarrow \frac{g}{2v_0^2 \cos(\alpha)^2}x_s = \tan(\alpha)$. Finalement $\boxed{x_s = \frac{2v_0^2 \cos(\alpha)^2 \tan(\alpha)}{g} = \frac{2v_0^2}{g}\sin(\alpha)\cos(\alpha)}$.

3. Le point le plus haut de la trajectoire correspond au maximum de $y(x)$, donc la dérivée est nulle. Autrement dit $\left.\frac{dy(x)}{dx}\right|_{x=x_P} = 0$.
Calculons la dérivée : $\frac{dy(x)}{dx} = \tan(\alpha) \times 1 - \frac{g}{2v_0^2 \cos(\alpha)^2} \times (2x) + 0 = \tan(\alpha) - \frac{g}{v_0^2 \cos(\alpha)^2}x$.

Résolvons maintenant $\left.\frac{dy(x)}{dx}\right|_{x=x_P} = 0$ soit $\tan(\alpha) - \frac{g}{v_0^2\cos(\alpha)^2}x_P = 0 \Rightarrow \frac{g}{v_0^2\cos(\alpha)^2}x_P = \tan(\alpha) \Rightarrow x_P = \frac{v_0^2\cos(\alpha)^2}{g}\tan(\alpha)$, donc $\boxed{x_P = \frac{v_0^2}{g}\sin(\alpha)\cos(\alpha)}$. On peut remarquer qu'il s'agit de la moitié de $x_s$ quand $h = 0$. Aussi, $x_P$ ne dépend pas de $h$ ! Donc peut importe la hauteur de départ, la position du maximum selon $Ox$ sera la même.

4. On peut maintenant utiliser $x_P$ dans l'expression $y(x)$ pour obtenir $y_P$ : $y_P = y(x_P) = \tan(\alpha)x_P - \frac{g}{2v_0^2\cos(\alpha)^2}x_P^2 + h \Rightarrow y_P = \tan(\alpha)\frac{v_0^2}{g}\sin(\alpha)\cos(\alpha) - \frac{g}{2v_0^2\cos(\alpha)^2}\left(\frac{v_0^2}{g}\sin(\alpha)\cos(\alpha)\right)^2 + h$
$\Rightarrow y_P = \frac{v_0^2}{g}\sin(\alpha)^2 - \frac{g}{2v_0^2\cos(\alpha)^2}\frac{v_0^4}{g^2}\sin(\alpha)^2\cos(\alpha)^2 + h$
$\Rightarrow y_P = \frac{v_0^2}{g}\sin(\alpha)^2 - \frac{v_0^2}{2g}\sin(\alpha)^2 + h$
$\Rightarrow y_P = \sin(\alpha)^2(\frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0^2}{2g}) + h$
$\Rightarrow y_P = \sin(\alpha)^2(\frac{2v_0^2}{2g} - \frac{v_0^2}{2g}) + h$
$\Rightarrow y_P = \sin(\alpha)^2\frac{v_0^2}{2g} + h.$
On trouve bien le résultat demandé $\boxed{y_P = \frac{v_0^2}{2g}\sin(\alpha)^2 + h}$.

# 2 La mise en œuvre pour valider l'apprentissage

**Exercice 3 : Chute d'une balle**

**Partie 1**

1. $\vec{v} = \vec{g}t + \overrightarrow{cst}$ or $\vec{v}(t=0) = \vec{0}$ d'où $\overrightarrow{cst} = \vec{0}$ donc $\vec{v} = \vec{g}t = gt\widehat{u}_z$.
2. $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}gt^2\widehat{u}_z + \overrightarrow{cst}$ or $\overrightarrow{OM}(t=0) = \vec{0}$ d'où $\overrightarrow{cst} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}gt^2\widehat{u}_z$. On en déduit $z(t) = \frac{1}{2}gt^2$.
3. $z = H$ au moment où la balle touche le sol, d'où $t_s = \sqrt{\frac{2H}{g}}$.
4. On injecte l'expression de $t$ dans l'expression de $v(t)$ pour obtenir $v(z) = \sqrt{2gz}$. Au moment de l'impact $v_s = \sqrt{2gH}$.
5. $v_i \simeq 20\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.
6. On considère maintenant le mouvement ascendant de la balle après le rebond. Nous prenons l'origine des temps au moment du rebond et nous considérons un axe orienté positivement vers le haut. La vitesse de la balle a pour expression $\vec{v} = -gt\widehat{u}_z + \vec{cst}$. La vitesse de la balle juste après l'impact vaut $v_s\widehat{u}_z$, nous obtenons donc $\vec{v} = -gt\widehat{u}_z + v_s\widehat{u}_z$.
7. La position de la balle en fonction du temps après l'impact a donc pour expression $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_st$ puisque $z = 0$ à $t = 0$.
8. La vitesse est nulle lorsque la balle atteint la hauteur maximale, le temps correspondant a pour expression $t_s = \frac{v_s}{g}$. La hauteur maximale atteinte est donc donnée par $h = -\frac{1}{2}\frac{v_s^2}{g} + \frac{v_s^2}{g} = \frac{1}{2}\frac{v_s^2}{g}$. Nous avons $v_s = 12\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, la hauteur maximale atteinte vaut donc $h = 7{,}2\,\mathrm{m}$.

**Partie 2**

9. On a $\vec{v} = gt\widehat{u}_z + \vec{cst}$. Nous avons $\vec{v} = v_0\widehat{u}_x$ à $t = 0$. Nous en déduisons $\vec{v} = gt\widehat{u}_z + v_0\widehat{u}_x$.
10. Le vecteur position $\overrightarrow{OM}$ a donc pour expression $\overrightarrow{OM} = g\frac{t^2}{2}\widehat{u}_z + v_0t\widehat{u}_x$.
11. $z(t) = H$ lorsque la balle touche le sol d'où $t_s = \sqrt{\frac{2H}{g}}$.
12. $v = \sqrt{g^2t_s^2 + v_0^2} = \sqrt{2Hg + v_0^2}$.

## Exercice 4 : Partie de tennis

1. On définit une axe $Ox$ horizontal qui va vers la droite et un axe $Oy$ vertical qui va vers le haut. L'origine du repère est le point de départ de la balle.
   Établissons les équations du mouvement, d'abord l'accélération : $\overrightarrow{a}(t) = -g\hat{u}_y$ (on suppose qu'il n'y a que la force de pesanteur).
   Ensuite la vitesse en intégrant : $\overrightarrow{v}(t) = -gt\hat{u}_y + \overrightarrow{\text{cste}}$. La vitesse initiale est $v_0$ et fait un angle $\alpha$ avec l'horizontale, il s'agit donc de la constante : $\overrightarrow{v}(t = 0) = \overrightarrow{\text{cste}} = \overrightarrow{v_0}$. En projetant sur les axes on obtient : $\overrightarrow{v}(t) = v_0\cos(\alpha)\hat{u}_x + (-gt + v_0\sin(\alpha))\,\hat{u}_y$.
   Enfin, calculons la position : $\overrightarrow{OM}(t) = v_0\cos(\alpha)t\hat{u}_x + \left(-\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin(\alpha)t\right)\hat{u}_y + \overrightarrow{\text{cste}}$. La position initiale correspond à $x = 0$ et $y = 0$, on a donc $\overrightarrow{OM}(t = 0) = \overrightarrow{\text{cste}} = \overrightarrow{0}$ : la constante est le vecteur nul. Finalement, la position est : $\overrightarrow{OM}(t) = v_0\cos(\alpha)t\hat{u}_x +$

$\left(-\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin(\alpha)t\right)\hat{u}_y$.
On peut maintenant calculer $H$. Il s'agit de la hauteur max, qui correspond donc au moment où la vitesse suivant $Oy$ s'annule. En effet elle est positive avant le max (la balle monte) et négative après (la balle descend). Résolvons donc l'équation $v_y(t_H) = 0$ sachant que $v_y(t_H) = -gt_H + v_0\sin(\alpha)$.
$-gt_H + v_0\sin(\alpha) = 0 \Rightarrow t_H = \frac{v_0}{g}\sin(\alpha)$.
On vient de trouver le temps pour lequel le max est atteint, il suffit de l'utiliser pour calculer $H$ qui est simplement la position suivant $Oy$ à ce moment-là : $H = y(t = t_H)$ où on a noté $y(t)$ la composante de la position suivant $Oy$.
$H = -\frac{1}{2}gt_H^2 + v_0\sin(\alpha)t_H$ soit $H = -\frac{1}{2}g\frac{v_0^2}{g^2}\sin(\alpha)^2 + v_0\sin(\alpha)\frac{v_0}{g}\sin(\alpha) = -\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}\sin(\alpha)^2 + \frac{v_0^2}{g}\sin(\alpha)^2$
Finalement, $H = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}\sin(\alpha)^2$ ou $\boxed{H = \frac{v_0^2\sin(\alpha)^2}{2g}}$.

2. Calculons $L$ : il s'agit de la position suivant $Ox$ au moment où la balle touche le sol, autrement dit au moment $t_L$ où $y(t_L) = 0$. Il faut donc résoudre l'équation $y(t_L) = 0$ pour trouver le temps $t_L$.
L'équation s'écrit $-\frac{1}{2}gt_L^2 + v_0\sin(\alpha)t_L = 0$. Une solution évidente est $t = 0$ mais elle ne nous intéresse pas puisqu'elle correspond à la position initiale. On cherche donc une solution $t_L \neq 0$ et on peut donc diviser par $t_L$ : $-\frac{1}{2}gt_L + v_0\sin(\alpha) = 0$. On obtient donc : $t_L = \frac{2v_0\sin(\alpha)}{g}$.
Maintenant qu'on a le temps $t_L$, calculons la posi-

tion suivant $Ox$ : $L = x(t = t_L) = v_0 \cos(\alpha) t_L$ $\Rightarrow L = v_0 \cos(\alpha) \frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g}$, donc $\boxed{\frac{2v_0^2}{g} \sin(\alpha) \cos(\alpha)}$.

3. Calculons $\frac{4H}{L}$ : $\frac{4H}{L} = \frac{4v_0^2 \sin(\alpha)^2}{2g} \frac{g}{2v_0^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)} = \tan(\alpha)$. Il est donc vrai que $\alpha = \arctan\left(\frac{4H}{L}\right)$.
4. On veut que notre balle soit à une hauteur d'au moins 2,8 m du sol au moment où elle passe au dessus du filet. On remplace donc $H$ par 2,8 m et $L$ par 23,77 m comme indiqué dans l'énoncé. $\boxed{\alpha = \arctan\left(\frac{4 \times 2{,}8}{23{,}77}\right) = 25°}$.
5. On cherche la vitesse initiale de la balle, donc $v_0$. On peut se servir de l'expression de $H$ : $H = \frac{v_0^2 \sin(\alpha)^2}{2g}$, donc $\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{2gH}{\sin(\alpha)^2}} = \sqrt{\frac{2 \times 9{,}81 \times 2{,}8}{\sin(25°)^2}} = 17{,}5\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 63\,\mathrm{km\,h^{-}}}$
6. Même calcul que la question 4, mais avec $H = h = 1\,\mathrm{m}$ la hauteur du filet. On obtient : $\boxed{\alpha = \arctan\left(\frac{4 \times 1}{23{,}77}\right) = 9{,}6°}$.
7. Même calcul que la question 5, mais avec les nouvelles valeurs de $H$ et $\alpha$. On obtient : $\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{2gH}{\sin(\alpha)^2}} = \sqrt{\frac{2 \times 9{,}81 \times 1}{\sin(9{,}6°)^2}} = 26{,}6\,\mathrm{m\,s^{-1}} = 96\,\mathrm{km\,h^{-1}}}$.

## Exercice 5 : Lancer à deux balles

On utilise les résultats de l'exercice 1 avec $h = 1\,\mathrm{m}$. On a l'expression de l'altitude des balles : $y(t) = v_0 \sin(\alpha) t - \frac{1}{2} g t^2 + h$.

La balle A est lancée horizontalement, donc avec $\alpha = 0$, à une vitesse $v_0$ inconnue. L'expression devient donc $y_A(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h$ puisque $\sin(0) = 0$
La balle B est lancée sans vitesse initiale : $v_0 = 0$, on obtient donc : $y_B(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h$.
Les deux balles ont la même équation pour $y(t)$, on trouvera donc la même solution pour $y(t) = 0$. $\boxed{\text{C'est pourquoi les ball}}$
On aurait pu le deviner dès le départ puisque l'accélération suivant $Oy$ est la même pour les deux balles (c'est la pesanteur) ; la vitesse initiale suivant $Oy$ est également la même puisque la vitesse de A est horizontale et B n'a pas de vitesse ; enfin la position initiale est la même $h = 1\,\mathrm{m}$. Mêmes conditions initiales et même accélération, donc le mouvement suivant $Oy$ est le même.

## Exercice 6 : Jet d'eau

1. Considérons une goutte d'eau faisant partie de ce jet d'eau. Elle est lancée vers le haut (disons qu'il s'agit de l'axe $Oz$) depuis la surface de l'eau à une vitesse $v_0$ qu'il faut déterminer. On connaît donc déjà les conditions initiales : $z(t = 0) = 0$ (départ au niveau de l'eau), et $\overrightarrow{v}(t = 0) = v_0\hat{u}_z$ (vitesse initiale).
   Supposons que le poids est la seule force qui s'applique sur la goutte d'eau. Son accélération est donc l'accélération de la pesanteur : $\overrightarrow{a}(t) = -g\hat{u}_z$.
   Le problème est entièrement situé le long de l'axe $Oz$, aucun mouvement suivant les autres axes ne sont possibles. On peut donc ignorer le caractère vectoriel des grandeurs utilisées et ne raisonner que suivant

$Oz$. En réalité plusieurs phénomènes comme le vent par exemple pourraient contredire cette affirmation mais on va ignorer toutes ces complications ici.
Intégrons l'accélération pour trouver la vitesse : $v_z(t) = -gt + \text{constante}$. En utilisant la condition initiale $v_z(t=0) = v_0$, on obtient que constante $= v_0$. On a alors $v_z(t) = -gt + v_0$.
Intégrons maintenant la vitesse pour obtenir la position : $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + \text{constante}$. La condition initiale est $z(t=0) = 0$, on obtient donc constante $= 0$. Finalement, l'équation horaire est $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$.
La dernière information qui nous est donnée est que la hauteur maximale atteinte est $z_{\text{max}} = 140\,\text{m}$. Déterminons l'expression de $z_{\text{max}}$. Le maximum de $z(t)$ correspond à une annulation de la dérivée, soit un moment pour lequel la vitesse est nulle. On obtient $v(t_{\text{max}}) = 0 \Rightarrow t_{\text{max}} = \frac{v_0}{g}$, où $t_{\text{max}}$ représente le temps $t$ pour lequel la hauteur vaut $z_{\text{max}}$. Ainsi on peut écrire $z_{\text{max}} = z(t = t_{\text{max}}) = -\frac{1}{2}gt_{\text{max}}^2 + v_0 t_{\text{max}} = -\frac{1}{2}g\frac{v_0^2}{g^2} + v_0\frac{v_0}{g} = (-\frac{1}{2} + 1)\frac{v_0^2}{g} = \frac{v_0^2}{2g}$.
On peut enfin déduire l'expression de $v_0$ : $v_0 = \sqrt{2gz_{\text{max}}} = \sqrt{2 \times 9{,}81 \times 140} = 52{,}4\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$. Le résultat en $\text{km}\,\text{h}^{-1}$ est alors $\boxed{v_0 = 52{,}4 \times 3{,}6 = 189\,\text{km}\,\text{h}^{-1}}$.

2. La vitesse réelle est un peu plus élevée que celle qu'on a calculé. La différence provient probablement du fait que le poids n'est pas la seule force qui s'applique aux gouttes d'eau, il existe des forces de frottement

qui perturbent leur trajectoire et donc diminuent la hauteur maximale du jet. Il faut donc lancer l'eau plus rapidement que prévu.

## Exercice 7 : Lancer de balle vertical

On définit l'axe $Oz$ qui part du sol et se dirige vers le haut. Le mouvement considéré dans cet exercice est entièrement vertical donc uniquement suivant $Oz$. On ne va donc pas prendre en compte le caractère vectoriel de la position, de la vitesse ou de l'accélération, et ne raisonner que suivant $Oz$.

1. On ne considère que la gravité, donc l'accélération est $a(t) = -g$. La vitesse est donc $v(t) = -gt + v_0$ puisque $v_0$ est la vitesse initiale, dirigée vers le haut. Enfin, la position est $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + h$ puisque $h$ est la position initiale.
   Le mouvement commence à $t = 0$ en $z = h$ dans la main de Sheldon, et on veut savoir quand la balle retombe dans sa main, donc pour quel temps $t_m \neq 0$ on a à nouveau $z(t_m) = h$. On obtient l'équation $z(t_m) = -\frac{1}{2}gt_m^2 + v_0 t_m + h = h$, donc $-\frac{1}{2}gt_m^2 + v_0 t_m = 0$. On peut diviser par $t_m$ car il est différent de 0 : $-\frac{1}{2}gt_m + v_0 = 0$. Finalement, on obtient $\boxed{t_m = \frac{2v_0}{g}}$.
2. Si la balle reste deux secondes en l'air, on a $t_m = 2\,\mathrm{s}$. On peut alors calculer $v_0 = \frac{gt_m}{2} = \frac{9{,}81 \times 2}{2}$, donc $\boxed{v_0 = 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-1}}}$.
3. La hauteur est maximale au moment $t_{\max}$ où la vitesse est nulle : elle est positive avant le max (la

balle monte) et négative après (la balle descend). $v(t_{\max}) = 0$ donne $t_{\max} = \frac{v_0}{g}$. La hauteur à ce moment-là est donc $z(t_{\max}) = -\frac{1}{2}gt_{\max}^2 + v_0 t_{\max} + h = -\frac{1}{2}g\frac{v_0}{g}^2 + v_0\frac{v_0}{g} + h$. $\boxed{z(t_{\max}) = \frac{v_0^2}{2g} + h}$, donc la hauteur max atteinte au-dessus du point de départ $h$ est $\frac{v_0^2}{2g} = \frac{9{,}81^2}{2\times 9{,}81} = 4{,}9\,\mathrm{m}$.

4. Les équations du mouvement établies à la question 1 sont toujours valides mais la fin de mouvement n'est maintenant plus en $z = h$ mais en $z = 0$ (on va supposer que le pied de Sheldon est au sol). Calculons à quel moment $t_p$ la balle lui tombe sur le pied : $z(t_p) = 0$. L'équation se réécrit $z(t_p) = -\frac{1}{2}gt_p^2 + v_0 t_p + h = 0$. On a une équation du second degré qu'on peut écrire comme ceci : $t_p^2 - \frac{2v_0}{g}t_p - \frac{2h}{g} = 0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta = \frac{4v_0^2}{g^2} - 4\times\left(-\frac{2h}{g}\right) = 4\left(\frac{v_0^2}{g^2} + \frac{2h}{g}\right)$. Les deux solutions s'écrivent donc : $t_p = \frac{v_0}{g} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{v_0}{g} \pm \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} + \frac{2h}{g}}$.
Une solution est négative, on peut donc l'ignorer et choisir la solution positive : $t_p = \frac{v_0}{g} + \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} + \frac{2h}{g}} = \frac{v_0}{g} + \frac{v_0}{g}\sqrt{1 + \frac{2hg^2}{gv_0^2}} = \frac{v_0}{g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2hg}{v_0^2}}\right)$.
Connaissant le temps du point d'impact, on peut maintenant calculer la vitesse au point d'impact : $v(t_p) = -gt_p + v_0 = -g\frac{v_0}{g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2hg}{v_0^2}}\right) + v_0 = -v_0\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2hg}{v_0^2}}\right) + v_0$

$v(t_p) = -v_0 - v_0\sqrt{1+\frac{2hg}{v_0^2}} + v_0 = -v_0\sqrt{1+\frac{2hg}{v_0^2}} = -\sqrt{v_0^2 + 2hg}$

$\boxed{v(t_p) = -\sqrt{9{,}81^2 + 2\times 1{,}2\times 9{,}81} = 11\,\mathrm{m\,s^{-1}}}$.

## Exercice 8 : fontaine

On va placer l'origine des axes sous la fontaine, au niveau de la surface de l'eau. On choisit l'axe $Ox$ vers la droite, le long de la surface de l'eau. L'axe $Oy$ est dirigé vers le haut, et traverse le point de sortie de l'eau de la fontaine. On considère que le jet d'eau quitte la fontaine au temps $t = 0$. La position initiale du jet d'eau est donc $\overrightarrow{OM}(t=0) = y_0\hat{u}_y$ avec $y_0 = 25\,\mathrm{cm}$. La vitesse initiale du jeu d'eau est horizontale, donc $\overrightarrow{v}(t=0) = v_0\hat{u}_x$.

1. Établissons les équations du mouvement : on considère la seule gravité, donc l'accélération est $\overrightarrow{a}(t) = -g\hat{u}_y$.
   On intègre pour obtenir la vitesse : $\overrightarrow{v}(t) = -gt\hat{u}_y + \overrightarrow{\mathrm{cste}}$. À $t = 0$ on a $\overrightarrow{v}(t=0) = \overrightarrow{\mathrm{cste}}$. Or on a vu que $\overrightarrow{v}(t=0) = v_0\hat{u}_x$, donc $\overrightarrow{\mathrm{cste}} = v_0\hat{u}_x$. Finalement, $\overrightarrow{v}(t) = -gt\hat{u}_y + v_0\hat{u}_x$.
   On intègre à nouveau pour trouver la position : $\overrightarrow{OM}(t) = -\frac{1}{2}gt^2\hat{u}_y + v_0t\hat{u}_x + \overrightarrow{\mathrm{cste}}$. La position initiale est $\overrightarrow{OM}(t=0) = \overrightarrow{\mathrm{cste}}$, et on a déjà dit que $\overrightarrow{OM}(t=0) = y_0\hat{u}_y$ avec $y_0 = 25\,\mathrm{cm}$. Donc $\overrightarrow{\mathrm{cste}} = y_0\hat{u}_y$. Finalement, $\overrightarrow{OM}(t) = \left(-\frac{1}{2}gt^2 + y_0\right)\hat{u}_y + v_0t\hat{u}_x$ avec $y_0 = 25\,\mathrm{cm}$.
   Maintenant il faut trouver l'angle $\alpha$ que fait le jet d'eau avec l'horizontale au moment où il atteint le bassin. Calculons à quel moment $t_f$ cela se produit.

L'altitude du jet d'eau est donnée par la composante de la position suivant $Oy$ : $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0$. Le jet d'eau atteint le bassin quand $y(t_f) = 0$, ce qui donne l'équation $-\frac{1}{2}gt_f^2 + y_0 = 0$. On trouve $t_f = \pm\sqrt{\frac{2y_0}{g}}$, mais la solution de temps négatif n'a pas de sens physique. On ne garde donc que la solution positive : $t_f = \sqrt{\frac{2y_0}{g}}$.

La position du jet d'eau suivant l'axe $Ox$ au moment $t_f$ est alors $x(t_f) = v_0 t_f = v_0\sqrt{\frac{2y_0}{g}}$. Or il est dit dans l'énoncé que l'eau tombe dans le bassin à une distance horizontale $x_f = 30\,\mathrm{cm}$, donc $x(t_f) = x_f$. L'équation donne : $v_0 = x_f\sqrt{\frac{g}{2y_0}}$.

Pour avoir l'angle $\alpha$, il faut trouver la direction de la vitesse du jet d'eau au moment où il touche le bassin (remarque technique : la vitesse est la tangente à la trajectoire, c'est donc bien grâce à elle qu'on peut obtenir l'angle). En dessinant le triangle rectangle dont l'hypoténuse est le vecteur vitesse, on peut se rendre compte que $\tan(\alpha) = \frac{|v_y|}{|v_x|}$. $v_x$ et $v_y$ sont les composantes de la vitesse à $t = t_f$ suivant $Ox$ et $Oy$ respectivement. En utilisant l'expression de la vitesse, on a $v_x(t) = v_0$ et $v_y(t) = -gt$. Alors, $\tan(\alpha) = \frac{gt_f}{v_0} = \frac{g\sqrt{\frac{2y_0}{g}}}{x_f\sqrt{\frac{g}{2y_0}}} = \frac{2y_0}{x_f} = \frac{2\times 25}{30} = 1{,}667$. Finalement on trouve $\boxed{\alpha = 59°}$.

2. Le module de la vitesse est la norme du vecteur,

donc $\sqrt{v_x^2+v_y^2} = \sqrt{g^2 t_f^2 + v_0^2} = \sqrt{g^2\frac{2y_0}{g} + x_f^2\frac{g}{2y_0}} = \sqrt{2y_0 g + x_f^2\frac{g}{2y_0}} = \sqrt{2\times 0{,}25\times 9{,}81 + 0{,}30^2\frac{9{,}81}{2\times 0{,}25}}$. La norme vaut donc $\boxed{2{,}58\,\mathrm{m\,s^{-1}}}$.

## Exercice 9 : Un camion à ne pas suivre

1. Le caillou n'est soumis qu'à l'accélération de la pesanteur, donc son accélération est $\overrightarrow{a}(t) = -g\hat{u}_y$. On intègre pour trouver la vitesse, en tenant compte de la vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ comme dans les précédents exercices : $\overrightarrow{v}(t) = (-gt + v_0\sin(\alpha))\,\hat{u}_y + v_0\cos(\alpha)\hat{u}_x$. Finalement, en intégrant à nouveau et en remarquant que la position initiale du caillou est l'origine, on obtient : $x(t) = v_0\cos(\alpha)t$ et $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin(\alpha)t$. On veut trouver le temps au bout duquel le caillou touche le sol, c'est-à-dire le moment $t_f$ pour lequel $y(t=t_f) = 0$. Ceci donne l'équation $-\frac{1}{2}gt_f^2 + v_0\sin(\alpha)t_f = 0$. On ignore la solution $t_f = 0$ puisqu'il s'agit du début du mouvement, donc on peut chercher l'autre solution $t_f \neq 0$ et diviser par $t_f$ : $-\frac{1}{2}gt_f + v_0\sin(\alpha) = 0$. On trouve : $\boxed{t_f = \frac{2v_0}{g}\sin(\alpha)}$.
2. Calculons la distance parcourue par le caillou : il s'agit de la position suivant $Ox$ à la fin du mouvement, c'est-à-dire quand $t = t_f$. $x(t_f) = v_0\cos(\alpha)t_f = v_0\cos(\alpha)\frac{2v_0}{g}\sin(\alpha) = \frac{2v_0^2}{g}\cos(\alpha)\sin(\alpha)$.
   On nous demande quelle est la distance maximale, il faut donc trouver l'angle $\alpha$ pour lequel l'expression obtenue est maximale. Autrement dit on veut

maximiser $\cos(\alpha)\sin(\alpha)$. On peut par exemple regarder quand la dérivée de cette expression s'annule pour trouver son maximum : $\frac{d}{d\alpha}(\cos(\alpha)\sin(\alpha)) = 0$ $\Rightarrow -\sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 = 0 \Rightarrow \sin(\alpha)^2 = \cos(\alpha)^2$ $\Rightarrow \sin(\alpha) = \pm\cos(\alpha)$. L'angle qui nous intéresse doit être supérieur à 0, sinon le caillou se dirigerait dans le sol, et inférieur à $\frac{\pi}{2}$ sinon le caillou se dirigerait dans le camion. Ceci nous donne un sinus et un cosinus positifs, donc on peut ignorer les solutions négatives de l'équation obtenue. On obtient $\sin(\alpha) = \cos(\alpha) \Rightarrow \tan(\alpha) = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} = 45°$. Pour cette valeur de l'angle, on a $\sin(\alpha) = \cos(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Finalement, l'expression de $x(t_f)$ devient $x(t_f) = \frac{2v_0^2}{g}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{2v_0^2}{g}\frac{1}{2}$. On a enfin $\boxed{x(t_f) = \frac{v_0^2}{g}}$.

3. Pour éviter le caillou, Léonard doit se situer à une distance d'au moins $x(t_f)$ du camion. Sauf que pendant le déplacement du caillou, Léonard s'est rapproché du camion puisqu'il roule avec une vitesse $\overrightarrow{v_0}$ ! Il doit donc prévoir la distance qu'il va parcourir pendant que le caillou est en l'air. Le calcul est très simple puisqu'il roule à vitesse constante $v_x(t) = v_0$, et le temps de parcours est simplement le temps de vol du caillou, donc $t_f$. Ceci donne la distance $v_0 \times t_f = \frac{2v_0^2}{g}\sin(\alpha)$. Or on a choisi le pire cas de figure $\alpha = 45°$, ce qui donne $v_0 \times t_f = \frac{2v_0^2}{g}\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}v_0^2}{g}$. En sommant cette distance avec la distance $x(t_f)$, on trouve : $\boxed{D = \frac{v_0^2}{g} + \frac{\sqrt{2}v_0^2}{g} = \frac{v_0^2}{g}\left(1+\sqrt{2}\right)}$.

4. On nous donne la valeur de $v_0$ : $v_0 = 90\,\mathrm{km\,h^{-1}} = 25\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.
   On trouve : $\boxed{D = \frac{25^2}{9.81}\left(1+\sqrt{2}\right) = 154\,\mathrm{m}}$.