

Mécanique

Acquis d'apprentissage n°4 : La chute libre à deux dimensions - solution

1 Les savoir-faire à connaître

Exercice 1 : Lancer de balle

1. La seule force s'exerçant sur la balle en l'air est son poids car il n'y a pas de frottements. L'accélération est donc constante et égale à l'accélération de la pesanteur :

$$\vec{a}(t) = \vec{g} = -g\hat{u}_y.$$

2. Connaissant l'accélération de la balle, on peut déterminer sa vitesse en intégrant : $\vec{v}(t) = -gt\hat{u}_y + \text{constanté}$. On peut calculer la vitesse à $t = 0$ pour trouver la constante : $\vec{v}(t = 0) = (-g \times 0)\hat{u}_y + \text{constanté} = \text{constanté}$. Or la vitesse initiale est notée \vec{v}_0 dans l'énoncé, donc $\text{constanté} = \vec{v}_0$. Projectons ce vecteur sur les axes Ox et Oy : $\vec{v}_0 = v_0 \cos(\alpha)\hat{u}_x + v_0 \sin(\alpha)\hat{u}_y$. Finalement on a $\vec{v}(t) = v_0 \cos(\alpha)\hat{u}_x + (v_0 \sin(\alpha) - gt)\hat{u}_y$.

À partir de la vitesse on peut maintenant calculer la position en intégrant à nouveau. On peut réaliser l'étude séparément suivant Ox et suivant Oy pour simplifier.

D'abord suivant Ox : la vitesse vaut $v_x(t) = v_0 \cos(\alpha)$ (tous les autres termes sont suivant Oy). On a donc une vitesse constante suivant Ox . L'intégration donne $x(t) = v_0 \cos(\alpha)t + \text{constante}$. Regardons les conditions initiales pour trouver la constante d'intégration : à $t = 0$ la balle est en $x = 0$, donc $x(t = 0) = 0 \Rightarrow v_0 \cos(\alpha) \times 0 + \text{constante} = 0 \Rightarrow \text{constante} = 0$. Finalement $x(t) = v_0 \cos(\alpha)t$.

Maintenant suivant Oy : la vitesse vaut $v_y(t) = v_0 \sin(\alpha) - gt$. L'intégration donne : $y(t) = v_0 \sin(\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 + \text{constante}$. La condition initiale est $y(t = 0) = h$, ce qui implique $v_0 \sin(\alpha) \times 0 - \frac{1}{2}g \times 0^2 + \text{constante} = h$, donc $\text{constante} = h$. Finalement,

$$y(t) = v_0 \sin(\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 + h.$$

3. Si $h = 0$, seule l'expression de $y(t)$ est impactée. On a : $y(t) = v_0 \sin(\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$.
4. Si $\alpha = 0$, la vitesse et la position vont être modifiées. On aura : $\cos(\alpha) = 1$ et $\sin(\alpha) = 0$. Ainsi, $\vec{v}(t) = v_0\hat{u}_x - gt\hat{u}_y$, $x(t) = v_0t$ et $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h$.
5. On se place dans le cas $\alpha = 0$ et $h \neq 0$. On a donc $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h$. On veut déterminer le temps t_s pour lequel la balle touche le sol, autrement dit quand $y(t_s) = 0$. Résolvons l'équation : $y(t_s) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}gt_s^2 + h = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}gt_s^2 = h \Rightarrow t_s^2 = \frac{2h}{g} \Rightarrow t_s = \pm\sqrt{\frac{2h}{g}}$. Il y a deux solutions puisqu'il s'agit d'une équation du second degré. La solution de temps négatif n'a pas de sens ici puisqu'on étudie le système à partir de $t = 0$, on ne garde donc que la solution positive : $t_s = \sqrt{\frac{2h}{g}}$.
6. Même logique mais avec $\alpha \neq 0$ et $h = 0$. On a donc $y(t) = v_0 \sin(\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2$. Résolvons l'équation $y(t_s) = 0$: $v_0 \sin(\alpha)t_s - \frac{1}{2}gt_s^2 = 0$. Une solution évidente est $t = 0$, mais elle ne nous intéresse pas puisqu'il s'agit de la condition initiale. On peut donc chercher une solution $t_s \neq 0$ et diviser l'équation par t_s : $v_0 \sin(\alpha) - \frac{1}{2}gt_s = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}gt_s = v_0 \sin(\alpha)$, donc

$$t_s = \frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g}.$$

On cherche maintenant l'angle α qui maximise t_s . On cherche un maximum de la fonction $t_s(\alpha) = \frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g}$. Un maximum correspond à une annulation de la dérivée donc cherchons à résoudre $\frac{dt_s(\alpha)}{d\alpha} = 0$. Ceci donne l'équation : $\frac{2v_0 \cos(\alpha)}{g} = 0$ puisque la dérivée de sin est cos. On a donc $\cos(\alpha) = 0$, ce qui donne $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Il faut donc lancer la balle verticalement vers le haut pour maximiser le temps avant qu'elle touche le sol, ce qui paraît logique.

Exercice 2 : Lancer de balle 2

1. L'équation de la trajectoire, c'est l'équation décrivant le tracé dans le plan Oxy du déplacement de la balle. Il s'agit donc de l'équation de la fonction $y(x)$.

Prenons $x(t)$ et $y(t)$ de l'exercice précédent : $x(t) = v_0 \cos(\alpha)t$ et $y(t) = v_0 \sin(\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 + h$. Une méthode est d'exprimer t en fonction de x , puis de remplacer t par son expression en fonction de x dans l'expression de y , ce qui nous donnera $y(x)$.

D'abord il nous faut t en fonction de x : $x(t) = v_0 \cos(\alpha)t \Rightarrow t(x) = \frac{x}{v_0 \cos(\alpha)}$.

Remplaçons t par $\frac{x}{v_0 \cos(\alpha)}$ dans l'équation $y(t)$: $y(x) = v_0 \sin(\alpha) \frac{x}{v_0 \cos(\alpha)} - \frac{1}{2}g \left(\frac{x}{v_0 \cos(\alpha)} \right)^2 + h$,

on obtient alors $y(x) = \tan(\alpha)x - \frac{g}{2v_0^2 \cos(\alpha)^2} x^2 + h$.

2. Si $h = 0$, l'équation précédente devient $y(x) = \tan(\alpha)x - \frac{g}{2v_0^2 \cos(\alpha)^2} x^2$. La distance maximale est atteinte quand la balle a touché le sol à la fin de son mouvement, soit quand $y = 0$. On peut donc résoudre l'équation $y(x) = 0$ pour trouver la solution. L'équation s'écrit $y(x_s) = \tan(\alpha)x_s - \frac{g}{2v_0^2 \cos(\alpha)^2} x_s^2 = 0$.

Une solution évidente est $x = 0$ mais il s'agit du point de départ donc on peut l'ignorer et chercher une solution $x_s \neq 0$, donc on peut diviser l'équation par x_s et on obtient $y(x_s) = \tan(\alpha) - \frac{g}{2v_0^2 \cos(\alpha)^2} x_s = 0 \Rightarrow \frac{g}{2v_0^2 \cos(\alpha)^2} x_s = \tan(\alpha)$. Finalement

$$x_s = \frac{2v_0^2 \cos(\alpha)^2 \tan(\alpha)}{g} = \frac{2v_0^2}{g} \sin(\alpha) \cos(\alpha).$$

3. Le point le plus haut de la trajectoire correspond au maximum de $y(x)$, donc la dérivée est nulle. Autrement dit $\left. \frac{dy(x)}{dx} \right|_{x=x_P} = 0$.

Calculons la dérivée : $\frac{dy(x)}{dx} = \tan(\alpha) \times 1 - \frac{g}{2v_0^2 \cos(\alpha)^2} \times (2x) + 0 = \tan(\alpha) - \frac{g}{v_0^2 \cos(\alpha)^2} x$.

Réolvons maintenant $\left. \frac{dy(x)}{dx} \right|_{x=x_P} = 0$ soit $\tan(\alpha) - \frac{g}{v_0^2 \cos(\alpha)^2} x_P = 0 \Rightarrow \frac{g}{v_0^2 \cos(\alpha)^2} x_P = \tan(\alpha)$

$\Rightarrow x_P = \frac{v_0^2 \cos(\alpha)^2}{g} \tan(\alpha)$, donc $x_P = \frac{v_0^2}{g} \sin(\alpha) \cos(\alpha)$. On peut remarquer qu'il s'agit de la moitié de x_s quand $h = 0$. Aussi, x_P ne dépend pas de h ! Donc peut importe la hauteur de départ, la position du maximum selon Ox sera la même.

4. On peut maintenant utiliser x_P dans l'expression $y(x)$ pour obtenir y_P : $y_P = y(x_P) = \tan(\alpha)x_P - \frac{g}{2v_0^2 \cos(\alpha)^2} x_P^2 + h \Rightarrow y_P = \tan(\alpha) \frac{v_0^2}{g} \sin(\alpha) \cos(\alpha) - \frac{g}{2v_0^2 \cos(\alpha)^2} \left(\frac{v_0^2}{g} \sin(\alpha) \cos(\alpha) \right)^2 + h$

$$\Rightarrow y_P = \frac{v_0^2}{g} \sin(\alpha)^2 - \frac{g}{2v_0^2 \cos(\alpha)^2} \frac{v_0^4}{g^2} \sin(\alpha)^2 \cos(\alpha)^2 + h$$

$$\Rightarrow y_P = \frac{v_0^2}{g} \sin(\alpha)^2 - \frac{v_0^2}{2g} \sin(\alpha)^2 + h$$

$$\Rightarrow y_P = \sin(\alpha)^2 \left(\frac{v_0^2}{g} - \frac{v_0^2}{2g} \right) + h$$

$$\Rightarrow y_P = \sin(\alpha)^2 \left(\frac{2v_0^2}{2g} - \frac{v_0^2}{2g} \right) + h$$

$$\Rightarrow y_P = \sin(\alpha)^2 \frac{v_0^2}{2g} + h.$$

On trouve bien le résultat demandé $y_P = \frac{v_0^2}{2g} \sin(\alpha)^2 + h$.

2 La mise en œuvre pour valider l'apprentissage

Exercice 3 : Chute d'une balle

Partie 1

1. $\vec{v} = \vec{g}t + \vec{cst}$ or $\vec{v}(t=0) = \vec{0}$ d'où $\vec{cst} = \vec{0}$ donc $\vec{v} = \vec{g}t = gt\hat{u}_z$.
2. $\vec{OM} = \frac{1}{2}gt^2\hat{u}_z + \vec{cst}$ or $\vec{OM}(t=0) = \vec{0}$ d'où $\vec{cst} = \vec{0}$ donc $\vec{OM} = \frac{1}{2}gt^2\hat{u}_z$. On en déduit $z(t) = \frac{1}{2}gt^2$.
3. $z = H$ au moment où la balle touche le sol, d'où $t_s = \sqrt{\frac{2H}{g}}$.
4. On injecte l'expression de t dans l'expression de $v(t)$ pour obtenir $v(z) = \sqrt{2gz}$. Au moment de l'impact $v_s = \sqrt{2gH}$.
5. $v_i \simeq 20 \text{ m s}^{-1}$.
6. On considère maintenant le mouvement ascendant de la balle après le rebond. Nous prenons l'origine des temps au moment du rebond et nous considérons un axe orienté positivement vers le haut. La vitesse de la balle a pour expression $\vec{v} = -gt\hat{u}_z + \vec{cst}$. La vitesse de la balle juste après l'impact vaut $v_s\hat{u}_z$, nous obtenons donc $\vec{v} = -gt\hat{u}_z + v_s\hat{u}_z$.
7. La position de la balle en fonction du temps après l'impact a donc pour expression $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_s t$ puisque $z = 0$ à $t = 0$.
8. La vitesse est nulle lorsque la balle atteint la hauteur maximale, le temps correspondant a pour expression $t_s = \frac{v_s}{g}$. La hauteur maximale atteinte est donc donnée par $h = -\frac{1}{2}\frac{v_s^2}{g} + \frac{v_s^2}{g} = \frac{1}{2}\frac{v_s^2}{g}$. Nous avons $v_s = 12 \text{ m s}^{-1}$, la hauteur maximale atteinte vaut donc $h = 7,2 \text{ m}$.

Partie 2

9. On a $\vec{v} = gt\hat{u}_z + \vec{cst}$. Nous avons $\vec{v} = v_0\hat{u}_x$ à $t = 0$. Nous en déduisons $\vec{v} = gt\hat{u}_z + v_0\hat{u}_x$.
10. Le vecteur position \vec{OM} a donc pour expression $\vec{OM} = g\frac{t^2}{2}\hat{u}_z + v_0t\hat{u}_x$.
11. $z(t) = H$ lorsque la balle touche le sol d'où $t_s = \sqrt{\frac{2H}{g}}$.
12. $v = \sqrt{g^2t_s^2 + v_0^2} = \sqrt{2Hg + v_0^2}$.

Exercice 4 : Partie de tennis

1. On définit une axe Ox horizontal qui va vers la droite et un axe Oy vertical qui va vers le haut. L'origine du repère est le point de départ de la balle.
Établissons les équations du mouvement, d'abord l'accélération : $\vec{a}(t) = -g\hat{u}_y$ (on suppose qu'il n'y a que la force de pesanteur).
Ensuite la vitesse en intégrant : $\vec{v}(t) = -gt\hat{u}_y + \vec{cst}$. La vitesse initiale est v_0 et fait un angle α avec l'horizontale, il s'agit donc de la constante : $\vec{v}(t=0) = \vec{cst} = \vec{v}_0$. En projetant sur les axes on obtient : $\vec{v}(t) = v_0 \cos(\alpha)\hat{u}_x + (-gt + v_0 \sin(\alpha))\hat{u}_y$.
Enfin, calculons la position : $\vec{OM}(t) = v_0 \cos(\alpha)t\hat{u}_x + (-\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\alpha)t)\hat{u}_y + \vec{cst}$. La position initiale correspond à $x = 0$ et $y = 0$, on a donc $\vec{OM}(t=0) = \vec{cst} = \vec{0}$: la constante est le vecteur nul. Finalement, la position est : $\vec{OM}(t) = v_0 \cos(\alpha)t\hat{u}_x + (-\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\alpha)t)\hat{u}_y$.
On peut maintenant calculer H . Il s'agit de la hauteur max, qui correspond donc au moment où la vitesse suivant Oy s'annule. En effet elle est positive avant le max (la balle monte) et négative après (la balle descend). Résolvons donc l'équation $v_y(t_H) = 0$ sachant que $v_y(t_H) = -gt_H + v_0 \sin(\alpha)$.
 $-gt_H + v_0 \sin(\alpha) = 0 \Rightarrow t_H = \frac{v_0}{g} \sin(\alpha)$.

On vient de trouver le temps pour lequel le max est atteint, il suffit de l'utiliser pour calculer H qui est simplement la position suivant Oy à ce moment-là : $H = y(t = t_H)$ où on a noté $y(t)$ la composante de la position suivant Oy .

$$H = -\frac{1}{2}gt_H^2 + v_0 \sin(\alpha)t_H \text{ soit } H = -\frac{1}{2}g\frac{v_0^2}{g^2} \sin(\alpha)^2 + v_0 \sin(\alpha)\frac{v_0}{g} \sin(\alpha) = -\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} \sin(\alpha)^2 + \frac{v_0^2}{g} \sin(\alpha)^2$$

Finalement, $H = \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g} \sin(\alpha)^2$ ou $\boxed{H = \frac{v_0^2 \sin(\alpha)^2}{2g}}$.

2. Calculons L : il s'agit de la position suivant Ox au moment où la balle touche le sol, autrement dit au moment t_L où $y(t_L) = 0$. Il faut donc résoudre l'équation $y(t_L) = 0$ pour trouver le temps t_L .

L'équation s'écrit $-\frac{1}{2}gt_L^2 + v_0 \sin(\alpha)t_L = 0$. Une solution évidente est $t = 0$ mais elle ne nous intéresse pas puisqu'elle correspond à la position initiale. On cherche donc une solution $t_L \neq 0$ et on peut donc diviser par t_L : $-\frac{1}{2}gt_L + v_0 \sin(\alpha) = 0$. On obtient donc : $t_L = \frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g}$.

Maintenant qu'on a le temps t_L , calculons la position suivant Ox : $L = x(t = t_L) = v_0 \cos(\alpha)t_L \Rightarrow L = v_0 \cos(\alpha)\frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g}$, donc $\boxed{\frac{2v_0^2}{g} \sin(\alpha) \cos(\alpha)}$.

3. Calculons $\frac{4H}{L}$: $\frac{4H}{L} = \frac{4v_0^2 \sin(\alpha)^2}{2g} \frac{g}{2v_0^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)} = \tan(\alpha)$. Il est donc vrai que $\alpha = \arctan\left(\frac{4H}{L}\right)$.
4. On veut que notre balle soit à une hauteur d'au moins 2,8 m du sol au moment où elle passe au dessus du filet. On remplace donc H par 2,8 m et L par 23,77 m comme indiqué dans l'énoncé.

$$\boxed{\alpha = \arctan\left(\frac{4 \times 2,8}{23,77}\right) = 25^\circ}$$

5. On cherche la vitesse initiale de la balle, donc v_0 . On peut se servir de l'expression de H :

$$H = \frac{v_0^2 \sin(\alpha)^2}{2g}, \text{ donc } \boxed{v_0 = \sqrt{\frac{2gH}{\sin(\alpha)^2}} = \sqrt{\frac{2 \times 9,81 \times 2,8}{\sin(25^\circ)^2}} = 17,5 \text{ m s}^{-1} = 63 \text{ km h}^{-1}}$$

6. Même calcul que la question 4, mais avec $H = h = 1$ m la hauteur du filet. On obtient :

$$\boxed{\alpha = \arctan\left(\frac{4 \times 1}{23,77}\right) = 9,6^\circ}$$

7. Même calcul que la question 5, mais avec les nouvelles valeurs de H et α . On obtient :

$$\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{2gH}{\sin(\alpha)^2}} = \sqrt{\frac{2 \times 9,81 \times 1}{\sin(9,6^\circ)^2}} = 26,6 \text{ m s}^{-1} = 96 \text{ km h}^{-1}}$$

Exercice 5 : Lancer à deux balles

On utilise les résultats de l'exercice 1 avec $h = 1$ m. On a l'expression de l'altitude des balles : $y(t) = v_0 \sin(\alpha)t - \frac{1}{2}gt^2 + h$.

La balle A est lancée horizontalement, donc avec $\alpha = 0$, à une vitesse v_0 inconnue. L'expression devient donc $y_A(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h$ puisque $\sin(0) = 0$

La balle B est lancée sans vitesse initiale : $v_0 = 0$, on obtient donc : $y_B(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h$.

Les deux balles ont la même équation pour $y(t)$, on trouvera donc la même solution pour $y(t) = 0$. $\boxed{\text{C'est pourquoi les balles touchent le sol en même temps.}}$

On aurait pu le deviner dès le départ puisque l'accélération suivant Oy est la même pour les deux balles (c'est la pesanteur) ; la vitesse initiale suivant Oy est également la même puisque la vitesse de A est horizontale et B n'a pas de vitesse ; enfin la position initiale est la même $h = 1$ m. Mêmes conditions initiales et même accélération, donc le mouvement suivant Oy est le même.

Exercice 6 : Jet d'eau

1. Considérons une goutte d'eau faisant partie de ce jet d'eau. Elle est lancée vers le haut (disons qu'il s'agit de l'axe Oz) depuis la surface de l'eau à une vitesse v_0 qu'il faut déterminer. On connaît donc déjà les conditions initiales : $z(t=0) = 0$ (départ au niveau de l'eau), et $\vec{v}(t=0) = v_0 \hat{u}_z$ (vitesse initiale).

Supposons que le poids est la seule force qui s'applique sur la goutte d'eau. Son accélération est donc l'accélération de la pesanteur : $\vec{a}(t) = -g \hat{u}_z$.

Le problème est entièrement situé le long de l'axe Oz , aucun mouvement suivant les autres axes ne sont possibles. On peut donc ignorer le caractère vectoriel des grandeurs utilisées et ne raisonner que suivant Oz . En réalité plusieurs phénomènes comme le vent par exemple pourraient contredire cette affirmation mais on va ignorer toutes ces complications ici.

Intégrons l'accélération pour trouver la vitesse : $v_z(t) = -gt + \text{constante}$. En utilisant la condition initiale $v_z(t=0) = v_0$, on obtient que constante = v_0 . On a alors $v_z(t) = -gt + v_0$.

Intégrons maintenant la vitesse pour obtenir la position : $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + \text{constante}$. La condition initiale est $z(t=0) = 0$, on obtient donc constante = 0. Finalement, l'équation horaire est $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t$.

La dernière information qui nous est donnée est que la hauteur maximale atteinte est $z_{\max} = 140$ m. Déterminons l'expression de z_{\max} . Le maximum de $z(t)$ correspond à une annulation de la dérivée, soit un moment pour lequel la vitesse est nulle. On obtient $v(t_{\max}) = 0 \Rightarrow t_{\max} = \frac{v_0}{g}$, où t_{\max} représente le temps t pour lequel la hauteur vaut z_{\max} . Ainsi on peut écrire $z_{\max} = z(t = t_{\max}) = -\frac{1}{2}gt_{\max}^2 + v_0t_{\max} = -\frac{1}{2}g\frac{v_0^2}{g^2} + v_0\frac{v_0}{g} = (-\frac{1}{2} + 1)\frac{v_0^2}{g} = \frac{v_0^2}{2g}$.

On peut enfin déduire l'expression de v_0 : $v_0 = \sqrt{2gz_{\max}} = \sqrt{2 \times 9,81 \times 140} = 52,4 \text{ m s}^{-1}$.

Le résultat en km h^{-1} est alors $\boxed{v_0 = 52,4 \times 3,6 = 189 \text{ km h}^{-1}}$.

2. La vitesse réelle est un peu plus élevée que celle qu'on a calculé. La différence provient probablement du fait que le poids n'est pas la seule force qui s'applique aux gouttes d'eau, il existe des forces de frottement qui perturbent leur trajectoire et donc diminuent la hauteur maximale du jet. Il faut donc lancer l'eau plus rapidement que prévu.

Exercice 7 : Lancer de balle vertical

On définit l'axe Oz qui part du sol et se dirige vers le haut. Le mouvement considéré dans cet exercice est entièrement vertical donc uniquement suivant Oz . On ne va donc pas prendre en compte le caractère vectoriel de la position, de la vitesse ou de l'accélération, et ne raisonner que suivant Oz .

1. On ne considère que la gravité, donc l'accélération est $a(t) = -g$. La vitesse est donc $v(t) = -gt + v_0$ puisque v_0 est la vitesse initiale, dirigée vers le haut. Enfin, la position est $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + h$ puisque h est la position initiale.

Le mouvement commence à $t = 0$ en $z = h$ dans la main de Sheldon, et on veut savoir quand la balle retombe dans sa main, donc pour quel temps $t_m \neq 0$ on a à nouveau $z(t_m) = h$. On obtient l'équation $z(t_m) = -\frac{1}{2}gt_m^2 + v_0t_m + h = h$, donc $-\frac{1}{2}gt_m^2 + v_0t_m = 0$. On peut diviser par t_m car il est différent de 0 : $-\frac{1}{2}gt_m + v_0 = 0$. Finalement, on obtient

$$\boxed{t_m = \frac{2v_0}{g}}$$

2. Si la balle reste deux secondes en l'air, on a $t_m = 2$ s. On peut alors calculer $v_0 = \frac{gt_m}{2} = \frac{9,81 \times 2}{2}$, donc $\boxed{v_0 = 9,81 \text{ m s}^{-1}}$.
3. La hauteur est maximale au moment t_{\max} où la vitesse est nulle : elle est positive avant le max (la balle monte) et négative après (la balle descend). $v(t_{\max}) = 0$ donne $t_{\max} = \frac{v_0}{g}$.

La hauteur à ce moment-là est donc $z(t_{\max}) = -\frac{1}{2}gt_{\max}^2 + v_0t_{\max} + h = -\frac{1}{2}g\frac{v_0^2}{g^2} + v_0\frac{v_0}{g} + h$.

$$\boxed{z(t_{\max}) = \frac{v_0^2}{2g} + h}, \text{ donc la hauteur max atteinte au-dessus du point de départ } h \text{ est } \frac{v_0^2}{2g} = \frac{9,81^2}{2 \times 9,81} = 4,9 \text{ m.}$$

4. Les équations du mouvement établies à la question 1 sont toujours valides mais la fin de mouvement n'est maintenant plus en $z = h$ mais en $z = 0$ (on va supposer que le pied de Sheldon est au sol). Calculons à quel moment t_p la balle lui tombe sur le pied : $z(t_p) = 0$. L'équation se réécrit $z(t_p) = -\frac{1}{2}gt_p^2 + v_0t_p + h = 0$.

On a une équation du second degré qu'on peut écrire comme ceci : $t_p^2 - \frac{2v_0}{g}t_p - \frac{2h}{g} = 0$. Le discriminant de cette équation est $\Delta = \frac{4v_0^2}{g^2} - 4 \times \left(-\frac{2h}{g}\right) = 4 \left(\frac{v_0^2}{g^2} + \frac{2h}{g}\right)$. Les deux solutions

$$\text{s'écrivent donc : } t_p = \frac{v_0}{g} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{v_0}{g} \pm \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} + \frac{2h}{g}}.$$

Une solution est négative, on peut donc l'ignorer et choisir la solution positive : $t_p = \frac{v_0}{g} + \sqrt{\frac{v_0^2}{g^2} + \frac{2h}{g}} = \frac{v_0}{g} + \frac{v_0}{g} \sqrt{1 + \frac{2hg^2}{gv_0^2}} = \frac{v_0}{g} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2hg}{v_0^2}}\right)$.

Connaissant le temps du point d'impact, on peut maintenant calculer la vitesse au point d'impact : $v(t_p) = -gt_p + v_0 = -g\frac{v_0}{g} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2hg}{v_0^2}}\right) + v_0 = -v_0 \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2hg}{v_0^2}}\right) + v_0$

$$v(t_p) = -v_0 - v_0 \sqrt{1 + \frac{2hg}{v_0^2}} + v_0 = -v_0 \sqrt{1 + \frac{2hg}{v_0^2}} = -\sqrt{v_0^2 + 2hg}$$

$$\boxed{v(t_p) = -\sqrt{9,81^2 + 2 \times 1,2 \times 9,81} = 11 \text{ m s}^{-1}}.$$

Exercice 8 : fontaine

On va placer l'origine des axes sous la fontaine, au niveau de la surface de l'eau. On choisit l'axe Ox vers la droite, le long de la surface de l'eau. L'axe Oy est dirigé vers le haut, et traverse le point de sortie de l'eau de la fontaine. On considère que le jet d'eau quitte la fontaine au temps $t = 0$. La position initiale du jet d'eau est donc $\overrightarrow{OM}(t = 0) = y_0\hat{u}_y$ avec $y_0 = 25$ cm. La vitesse initiale du jeu d'eau est horizontale, donc $\vec{v}(t = 0) = v_0\hat{u}_x$.

1. Établissons les équations du mouvement : on considère la seule gravité, donc l'accélération est $\vec{a}(t) = -g\hat{u}_y$.

On intègre pour obtenir la vitesse : $\vec{v}(t) = -gt\hat{u}_y + \overrightarrow{\text{csté}}$. À $t = 0$ on a $\vec{v}(t = 0) = \overrightarrow{\text{csté}}$. Or on a vu que $\vec{v}(t = 0) = v_0\hat{u}_x$, donc $\overrightarrow{\text{csté}} = v_0\hat{u}_x$. Finalement, $\vec{v}(t) = -gt\hat{u}_y + v_0\hat{u}_x$.

On intègre à nouveau pour trouver la position : $\overrightarrow{OM}(t) = -\frac{1}{2}gt^2\hat{u}_y + v_0t\hat{u}_x + \overrightarrow{\text{csté}}$. La position initiale est $\overrightarrow{OM}(t = 0) = \overrightarrow{\text{csté}}$, et on a déjà dit que $\overrightarrow{OM}(t = 0) = y_0\hat{u}_y$ avec $y_0 = 25$ cm. Donc $\overrightarrow{\text{csté}} = y_0\hat{u}_y$. Finalement, $\overrightarrow{OM}(t) = \left(-\frac{1}{2}gt^2 + y_0\right)\hat{u}_y + v_0t\hat{u}_x$ avec $y_0 = 25$ cm.

Maintenant il faut trouver l'angle α que fait le jet d'eau avec l'horizontale au moment où il atteint le bassin. Calculons à quel moment t_f cela se produit. L'altitude du jet d'eau est donnée par la composante de la position suivant Oy : $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0$. Le jet d'eau atteint le bassin quand $y(t_f) = 0$, ce qui donne l'équation $-\frac{1}{2}gt_f^2 + y_0 = 0$. On trouve $t_f = \pm\sqrt{\frac{2y_0}{g}}$, mais la solution de temps négatif n'a pas de sens physique. On ne garde donc que la solution positive : $t_f = \sqrt{\frac{2y_0}{g}}$.

La position du jet d'eau suivant l'axe Ox au moment t_f est alors $x(t_f) = v_0t_f = v_0\sqrt{\frac{2y_0}{g}}$.

Or il est dit dans l'énoncé que l'eau tombe dans le bassin à une distance horizontale $x_f = 30$ cm, donc $x(t_f) = x_f$. L'équation donne : $v_0 = x_f\sqrt{\frac{g}{2y_0}}$.

Pour avoir l'angle α , il faut trouver la direction de la vitesse du jet d'eau au moment où il touche le bassin (remarque technique : la vitesse est la tangente à la trajectoire, c'est donc bien grâce à elle qu'on peut obtenir l'angle). En dessinant le triangle rectangle dont

l'hypoténuse est le vecteur vitesse, on peut se rendre compte que $\tan(\alpha) = \frac{|v_y|}{|v_x|}$. v_x et v_y sont les composantes de la vitesse à $t = t_f$ suivant Ox et Oy respectivement. En utilisant l'expression de la vitesse, on a $v_x(t) = v_0$ et $v_y(t) = -gt$. Alors, $\tan(\alpha) = \frac{gt_f}{v_0} = \frac{g\sqrt{\frac{2y_0}{g}}}{x_f\sqrt{\frac{g}{2y_0}}} = \frac{2y_0}{x_f} = \frac{2 \times 25}{30} = 1,667$. Finalement on trouve $\alpha = 59^\circ$.

2. Le module de la vitesse est la norme du vecteur, donc $\sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{g^2 t_f^2 + v_0^2} = \sqrt{g^2 \frac{2y_0}{g} + x_f^2 \frac{g}{2y_0}} = \sqrt{2y_0 g + x_f^2 \frac{g}{2y_0}} = \sqrt{2 \times 0,25 \times 9,81 + 0,30^2 \frac{9,81}{2 \times 0,25}}$. La norme vaut donc $2,58 \text{ m s}^{-1}$.

Exercice 9 : Un camion à ne pas suivre

1. Le caillou n'est soumis qu'à l'accélération de la pesanteur, donc son accélération est $\vec{a}(t) = -g\hat{u}_y$. On intègre pour trouver la vitesse, en tenant compte de la vitesse initiale \vec{v}_0 comme dans les précédents exercices : $\vec{v}(t) = (-gt + v_0 \sin(\alpha))\hat{u}_y + v_0 \cos(\alpha)\hat{u}_x$. Finalement, en intégrant à nouveau et en remarquant que la position initiale du caillou est l'origine, on obtient : $x(t) = v_0 \cos(\alpha)t$ et $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\alpha)t$. On veut trouver le temps au bout duquel le caillou touche le sol, c'est-à-dire le moment t_f pour lequel $y(t = t_f) = 0$. Ceci donne l'équation $-\frac{1}{2}gt_f^2 + v_0 \sin(\alpha)t_f = 0$. On ignore la solution $t_f = 0$ puisqu'il s'agit du début du mouvement, donc on peut chercher l'autre solution $t_f \neq 0$ et diviser par t_f : $-\frac{1}{2}gt_f + v_0 \sin(\alpha) = 0$. On trouve : $t_f = \frac{2v_0}{g} \sin(\alpha)$.

2. Calculons la distance parcourue par le caillou : il s'agit de la position suivant Ox à la fin du mouvement, c'est-à-dire quand $t = t_f$. $x(t_f) = v_0 \cos(\alpha)t_f = v_0 \cos(\alpha)\frac{2v_0}{g} \sin(\alpha) = \frac{2v_0^2}{g} \cos(\alpha) \sin(\alpha)$.

On nous demande quelle est la distance maximale, il faut donc trouver l'angle α pour lequel l'expression obtenue est maximale. Autrement dit on veut maximiser $\cos(\alpha) \sin(\alpha)$. On peut par exemple regarder quand la dérivée de cette expression s'annule pour trouver son maximum : $\frac{d}{d\alpha} (\cos(\alpha) \sin(\alpha)) = 0 \Rightarrow -\sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 = 0 \Rightarrow \sin(\alpha)^2 = \cos(\alpha)^2 \Rightarrow \sin(\alpha) = \pm \cos(\alpha)$. L'angle qui nous intéresse doit être supérieur à 0, sinon le caillou se dirigerait dans le sol, et inférieur à $\frac{\pi}{2}$ sinon le caillou se dirigerait dans le camion. Ceci nous donne un sinus et un cosinus positifs, donc on peut ignorer les solutions négatives de l'équation obtenue. On obtient $\sin(\alpha) = \cos(\alpha) \Rightarrow \tan(\alpha) = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$. Pour cette valeur de l'angle, on a $\sin(\alpha) = \cos(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Finalement, l'expression de $x(t_f)$

devient $x(t_f) = \frac{2v_0^2}{g} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{2v_0^2}{g} \frac{1}{2}$. On a enfin $x(t_f) = \frac{v_0^2}{g}$.

3. Pour éviter le caillou, Léonard doit se situer à une distance d'au moins $x(t_f)$ du camion. Sauf que pendant le déplacement du caillou, Léonard s'est rapproché du camion puisqu'il roule avec une vitesse \vec{v}_0 ! Il doit donc prévoir la distance qu'il va parcourir pendant que le caillou est en l'air. Le calcul est très simple puisqu'il roule à vitesse constante $v_x(t) = v_0$, et le temps de parcours est simplement le temps de vol du caillou, donc t_f . Ceci donne la distance $v_0 \times t_f = \frac{2v_0^2}{g} \sin(\alpha)$. Or on a choisi le pire cas de figure $\alpha = 45^\circ$, ce qui donne $v_0 \times t_f = \frac{2v_0^2}{g} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}v_0^2}{g}$.

En sommant cette distance avec la distance $x(t_f)$, on trouve : $D = \frac{v_0^2}{g} + \frac{\sqrt{2}v_0^2}{g} = \frac{v_0^2}{g} (1 + \sqrt{2})$.

4. On nous donne la valeur de v_0 : $v_0 = 90 \text{ km h}^{-1} = 25 \text{ m s}^{-1}$.

On trouve : $D = \frac{25^2}{9,81} (1 + \sqrt{2}) = 154 \text{ m}$.