Mécanique
Acquis d'apprentissage n°4 : La chute libre à deux dimensions

Consignes : Justifier toutes les réponses. Une réponse correcte non justifiée est considérée comme fausse en devoir. Soigner la rédaction des réponses et respecter les notations de l'énoncé. Une réponse qui utilise une autre notation est considérée comme fausse en devoir.

Cette série d'exercices doit vous permettre de maîtriser les savoir-faire suivants :

1. Savoir établir les équations horaires du mouvement d'un objet en chute libre.
2. Savoir établir l'équation de la trajectoire d'un objet en chute libre et l'étudier

1 Les savoir-faire à connaître

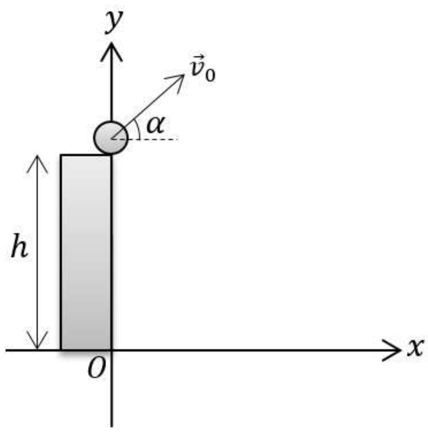
Savoir établir les équations horaires du mouvement

Exercice 1 : Lancer de balle

1. Quelle est l'accélération $\vec{a}$ d'une balle lancée en l'air lorsque les frottements sont négligeables ? En déduire que $a_x = 0$ et $a_y = -g$ dans le repère cartésien de la figure ci-contre.
2. Montrer que les équations horaires du mouvement d'une balle lancée d'un mur de hauteur h ont pour expression :

$$\begin{aligned} x(t) &= v_0 \cos(\alpha) t \\ y(t) &= -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin(\alpha) t + h \end{aligned}$$

   La balle est en $x = 0$ et $y = h$ à $t = 0$. Le vecteur vitesse de la balle à $t = 0$ est noté $\vec{v}_0$ et fait un angle α avec l'horizontale.



3. Que deviennent les équations précédentes dans le cas $h = 0$?
4. Que deviennent les équations précédentes dans le cas $\alpha = 0$?
5. Déterminer l'expression du temps t_s mis par la balle pour toucher le sol dans le cas $\alpha = 0$ et $h \neq 0$. Est-ce que t_s dépend de v_0 ?
6. Montrer que le temps t_s mis par la balle pour toucher le sol dans le cas $h = 0$ et $\alpha \neq 0$ a pour expression $t_s = \frac{2v_0 \sin(\alpha)}{g}$. Quel est l'angle α qui rend t_s maximal ?

Savoir établir l'équation de la trajectoire d'un corps en chute libre et l'étudier

Exercice 2 : Lancer de balle 2

1. À partir des équations horaires du mouvement de l'exercice précédent, montrer que l'équation de la trajectoire dans le cas $\alpha \neq 0$ et $h \neq 0$ a pour expression :

$$y(x) = \tan(\alpha)x - \frac{g}{2v_0^2\cos(\alpha)^2}x^2 + h$$

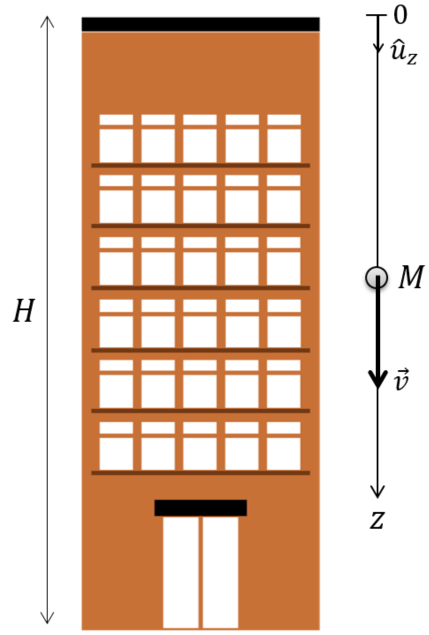
2. Déterminer la distance max x_s atteinte par la balle dans le cas où $h = 0$.
3. Que vaut la dérivée $\frac{dy}{dx}$ au point le plus haut de la trajectoire parabolique ? En déduire la position x_P du point le plus haut de la trajectoire.
   Outil mathématique à utiliser : la dérivée d'une fonction en un extremum est nulle.
4. En déduire que la hauteur max y_P a pour expression $y_P = \frac{v_0^2\sin^2(\alpha)}{2g} + h$.

2 La mise en œuvre pour valider l'apprentissage

Exercice 3 : Chute d'une balle

Partie 1

On étudie dans un premier temps la chute verticale d'une balle de masse m dans l'air lâchée **sans vitesse initiale** du haut d'un immeuble de hauteur H. Nous notons M la position de la balle. Nous orientons l'axe Oz vers le bas. La balle est en 0 à $t = 0$.



Nous négligeons l'effet de la force de frottement qu'exerce l'air sur la balle.

1. Déterminer l'expression du vecteur vitesse de la balle.

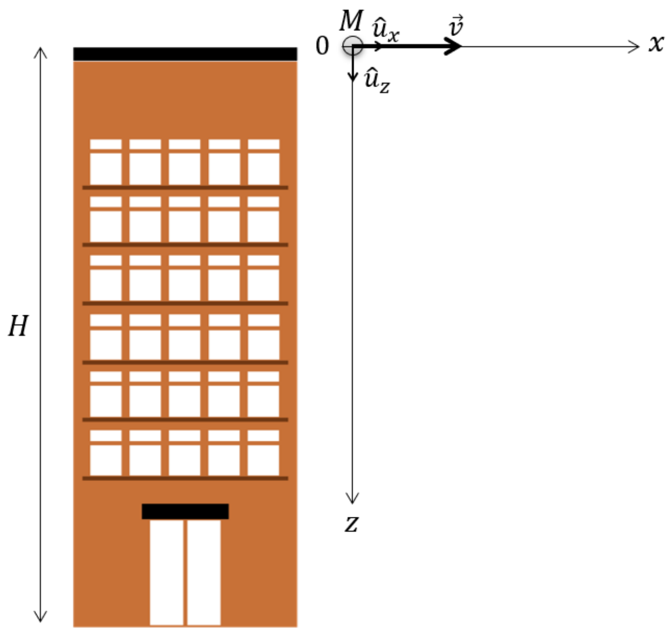
2. Déterminer l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$. En déduire l'expression de $z(t)$ où $z(t)$ est donnée par $\overrightarrow{OM} = z(t)\widehat{u}_z$.
3. Montrer que le temps t_s mis par la balle pour toucher le sol a pour expression $t_s = \sqrt{\frac{2H}{g}}$.
4. Montrer que $v(z) = \sqrt{2gz}$. En déduire l'expression de la vitesse au moment de l'impact.
5. Montrer que la vitesse v_i au moment de l'impact pour $H = 20\,\mathrm{m}$ vaut $v_i \simeq 20\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

Nous cherchons maintenant la hauteur atteinte par la balle après son premier rebond sur le sol.

6. Déterminer l'expression de la vitesse de la balle en fonction du temps après son premier rebond sur le sol. Prendre l'origine du temps au moment du contact de la balle sur le sol et nommer v_s la vitesse de la balle juste après l'impact.
7. En déduire l'expression de la position de la balle en fonction du temps.
8. Juste après l'impact sur le sol, la balle repars avec 60 % de la vitesse v_i. Montrer que la hauteur maximum atteinte par la balle après le rebond vaut $h = 7{,}2\,\mathrm{m}$ avec $H = 20\,\mathrm{m}$.

Partie 2

Nous considérons maintenant que la balle est lancée horizontalement du haut de l'immeuble avec la vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0\widehat{u}_x$.



9. Déterminer l'expression du vecteur vitesse de la balle. On rappelle que l'accélération d'une balle en chute libre à la surface de la Terre a pour expression $\vec{a} = \vec{g}$ où $\vec{g}$ est l'accélération de la pesanteur.
10. Déterminer l'expression du vecteur position $\overrightarrow{OM}$. En déduire l'expression de $z(t)$ et $x(t)$ donnée par $\overrightarrow{OM} = x(t)\widehat{u}_x + z(t)\widehat{u}_z$.
11. En déduire l'expression du temps t_s mis par la balle pour toucher le sol.
12. Montrer que la norme de la vitesse au moment de l'impact a pour expression $v = \sqrt{2Hg + v_0^2}$.

Exercice 4 : Lancer de balle vertical

Sheldon lance une balle verticalement depuis sa main située à une hauteur h du sol. On note v_0 la vitesse initiale.

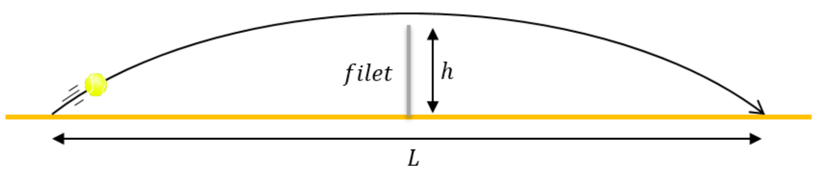
1. Déterminer l'expression du temps mis par la balle pour retomber dans la main de Sheldon.
2. Quelle doit être la valeur de v_0 pour que la balle reste deux secondes en l'air ?
3. Déterminer la hauteur max atteinte dans ce cas.

Sheldon relance la balle mais ne parvient pas à la rattraper et la balle lui tombe sur le pied.

4. Déterminer la vitesse de la balle au point d'impact sachant que $h = 1{,}2\,\mathrm{m}$.

Exercice 5 : Partie de tennis

La figure suivante montre un court de tennis vu de profil. On note $h = 1\,\mathrm{m}$ la hauteur du filet, $L = 23{,}77\,\mathrm{m}$ la longueur du court, x l'axe horizontal et y l'axe vertical. Pour simplifier le problème, on considère que le joueur frappe la balle à $t = 0$ au point $x = 0$ et $y = 0$. On souhaite déterminer les caractéristiques d'un coup "à plat", c'est-à-dire sans effet, qui permet d'envoyer la balle en $x = L$ et $y = 0$. On note H la hauteur max atteinte par un tel coup.



1. Montrer que $H = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$ où v_0 est la vitesse initiale de balle et α est l'angle que fait le vecteur vitesse initiale avec l'horizontale.
2. Montrer que $\frac{2v_0^2}{g} \sin\alpha \cos\alpha = L$.
3. En déduire que l'angle α a pour expression $\alpha = \arctan\left(\frac{4H}{L}\right)$.
4. Calculer la valeur de l'angle α en degrés qui permet de lober un joueur au filet dont la raquette se trouve à $2{,}8\,\mathrm{m}$ du sol.
5. Calculer alors la valeur en $\mathrm{km\,h^{-1}}$ de la vitesse de la balle au moment où elle quitte la raquette.
6. Calculer la valeur de l'angle α en degrés qui permet de faire passer la balle juste au-dessus du filet.
7. Calculer alors la valeur en $\mathrm{km\,h^{-1}}$ de la vitesse de la balle au moment de quitter la raquette.

Exercice 6 : Lancer à deux balles

Sheldon lance une balle A horizontalement à $1\,\mathrm{m}$ du sol et lâche au même instant une balle B à $1\,\mathrm{m}$ au dessus du sol. Quelle balle touche le sol en premier ? (Vous devez utiliser les résultats de l'exo 1).

Exercice 7 : Jet d'eau

Il est écrit sur la page Wikipedia du grand jet d'eau de Genève (figure ci-dessous) que celui-ci atteint la hauteur max de $140\,\mathrm{m}$.

1. Calculer la valeur de la vitesse de sortie de l'eau en $\mathrm{km\,h^{-1}}$.
2. Il est écrit sur la page Wikipedia que la valeur de la vitesse de sortie de l'eau est de $200\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. Expliquer d'où provient la différence avec le résultat trouvé à la question précédente.

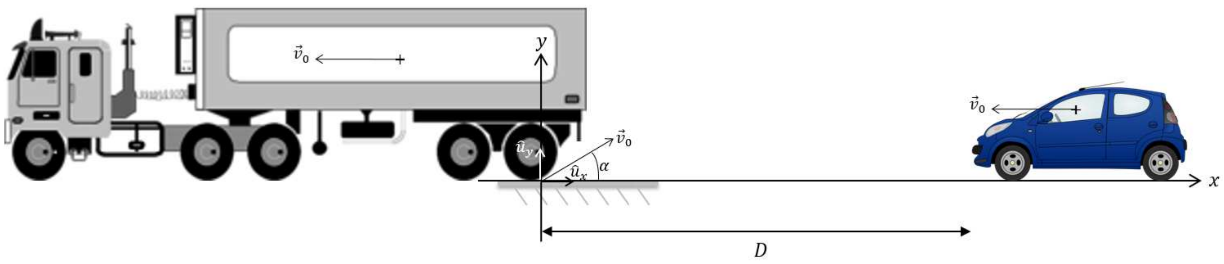
Exercice 8 : fontaine

La figure ci-dessous montre une fontaine d'eau potable. Le jet d'eau sort horizontalement à une hauteur de $25\,\mathrm{cm}$ au-dessus du bassin. L'eau tombe dans le bassin après avoir parcourue une distance horizontale de $30\,\mathrm{cm}$.

1. Montrer que l'angle que fait le jet d'eau avec le l'horizontale lorsqu'il atteint le bassin vaut $\alpha = 59°$.
2. Calculer le module de la vitesse de l'eau à cet instant.

Exercice 9 : Un camion à ne pas suivre

Léonard roule en voiture derrière un camion. Il voit qu'une pierre est fichée dans le pneu du camion. De peur que la pierre ne se détache, Léonard éloigne son véhicule du camion et se place à une distance D de celui-ci avant de rouler à nouveau à la même vitesse que le camion. On note $\vec{v}_0$ la vitesse du camion. On suppose que le caillou quitte le pneu avec la vitesse $\vec{v}_0$.



1. Déterminer le temps au bout duquel le caillou touche le sol.
2. Montrer que la distance max parcourue par le caillou entre la roue du camion et son impact sur le sol a pour expression $\frac{v_0^2}{g}$.
3. Montrer que la distance D qui doit séparer la voiture du camion pour être certain que Léonard ne reçoive pas le caillou a pour expression $D = \frac{v_0^2}{g}(1+\sqrt{2})$.
4. Calculer la valeur de D pour un camion qui roule à $90\,\mathrm{km\,h^{-1}}$.