Mécanique
Acquis d'apprentissage n°3 : vecteurs position, vitesse et accélération - solution

1 Les savoir-faire à connaître

Exercice 1 : Mouvement dans un plan

1. La vitesse est la dérivée de la position : $\boxed{\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\hat{u}_x + \frac{dy(t)}{dt}\hat{u}_y = C_1 t\hat{u}_x + C_2\hat{u}_y}$.
2. La vitesse scalaire est la norme du vecteur vitesse : $\boxed{v(t) = \|\vec{v}(t)\| = ||\vec{v}|| = \sqrt{{C_1}^2 t^2 + {C_2}^2}}$.
   À $t = 1\,\mathrm{s}$ on a $\boxed{v(t = 1\,\mathrm{s}) = \sqrt{1^2 + 16} = \sqrt{17} \simeq 4{,}1\,\mathrm{m\,s^{-1}}}$ pour $C_1 = 1$ et $C_2 = 4$.
3. L'accélération est la dérivée de la vitesse : $\boxed{\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = C_1\hat{u}_x}$. Le vecteur accélération est constant. À $t = 0$, le vecteur accélération vaut $\boxed{\vec{a}(t) = C_1\hat{u}_x}$.

Exercice 2 : Course à pied

1. $x(t = 0) = 0$ et $x(t = +\infty) = 5,4$. Il s'agit d'une fonction usuelle.
2. On dérive la position pour obtenir la vitesse : $\boxed{v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = (-5{,}4) \times (-1{,}5) \times e^{-1.5t} = 8{,}1e^{-1.5t}}$.
   Puisque la position est exprimée en km et que le temps est exprimé en h, la vitesse est bien exprimée en $\mathrm{km\,h^{-1}}$.
   La vitesse de Léonard au début de sa course est $\boxed{v(t = 0) = 8{,}1\,\mathrm{km\,h^{-1}}}$.
   Sa vitesse au bout d'une heure de course est $\boxed{v(t = 1\,\mathrm{h}) = 8{,}1 \times e^{-1.5\times 1} \simeq 1{,}8\,\mathrm{km\,h^{-1}}}$.

Exercice 3 : Particule chargée accélérée

1. On dérive la position pour obtenir la vitesse :
   $\boxed{\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx(t)}{dt}\hat{u}_x + \frac{dy(t)}{dt}\hat{u}_y = a_x t\hat{u}_x - y_0\omega\sin(\omega t)\hat{u}_y}$.
2. On dérive une seconde fois pour obtenir l'accélération : $a(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2x(t)}{dt^2}\hat{u}_x + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\hat{u}_y$.
   Finalement, $\boxed{a(t) = a_x\hat{u}_x - y_0\omega^2\cos(\omega t)\hat{u}_y}$.

Exercice 4 : Lancé de pomme

1. La fonction $z(t)$ décrit la position de la pomme et correspond donc à une distance. Les termes $-\frac{1}{2}gt^2$, $v_0 t$ et z_0 doivent donc également être des distances. Puisque t est un temps, on en déduit que $\boxed{[g] = \frac{\text{distance}}{\text{temps}^2} = \mathrm{L\,T^{-2}}}$ (unité $\mathrm{m\,s^{-2}}$), $\boxed{[v_0] = \frac{\text{distance}}{\text{temps}} = \mathrm{L\,T^{-1}}}$ (unité $\mathrm{m\,s^{-1}}$) et $\boxed{[z_0] = \text{distance} = \mathrm{L}}$ (unité m).

2. Calculons $z(t=0)$: $-\frac{1}{2}g \times 0^2 + v_0 \times 0 + z_0$. On voit que :
   $\boxed{z(t=0) = z_0 = 1{,}5\,\text{m. } z_0 \text{ représente la position initiale de la pomme}}$.
   Calculons la vitesse de la pomme avec la dérivée de $z(t)$: $v(t) = \frac{dz(t)}{dt} = -gt + v_0$. À l'instant $t = 0$, on obtient :
   $\boxed{v(t=0) = -g \times 0 + v_0 = v_0 = 3{,}0\,\text{m}\,\text{s}^{-1}\text{. } v_0 \text{ représente la vitesse initiale de la pomme}}$.
   $\boxed{\text{On peut dire que } v_0 \text{ et } z_0 \text{ expriment les conditions initiales du mouvement de la pomme}}$.

Exercice 5 : Décollage d'une fusée

1. $\vec{v} = 2a\sqrt{\tau}\sqrt{t}\,\vec{u}_z$.
2. $\overrightarrow{OM} = \frac{4a\sqrt{\tau}}{3}t^{3/2}\vec{u}_z$.
3. $z = 2044\,\text{m}$.

Exercice 6 : Décollage d'une fusée 2

1. L'accélération est constante suivant $\hat{u}_z$, et la fusée est immobile et positionnée en $z = 0$ au début du mouvement. Donc la trajectoire se fera uniquement suivant l'axe Oz et on ne peut considérer que les composantes des vecteurs suivant Oz. La vitesse s'exprime ainsi $v(t) = at + \text{constante}$. Utilisons la condition initiale $v(t=0) = 0$, qui donne constante $= 0$. Finalement, $\boxed{v(t) = at}$.
2. À partir de l'expression de la vitesse, on en déduit la position : $z(t) = \frac{1}{2}at^2 + \text{constante}$. La condition initiale $z(t=0) = 0$ donne constante $= 0$. On obtient $\boxed{z(t) = \frac{1}{2}at^2}$.
3. On veut exprimer v en fonction de z et non plus t. Une solution est de trouver l'expression de t en fonction de z pour éliminer t de l'équation et le remplacer par z.
   À partir de l'expression de $z(t)$, on obtient : $t^2 = \frac{2z}{a} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2z}{a}}$.
   On peut maintenant remplacer t par cette formule dans l'expression de $v(t)$, et on trouve : $v(z) = a\sqrt{\frac{2z}{a}} = \sqrt{a^2 \times \frac{2z}{a}}$, donc $\boxed{v(z) = \sqrt{2az}}$.
   Il s'agit d'une fonction racine qu'on peut facilement tracer à la main. Pour déterminer les valeurs sur les axes, on peut par exemple prendre le point de repère suivant : $v(z = 1\,\text{m}) = \sqrt{2 \times 3{,}3 \times 1} \simeq 2{,}6\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$.
   Vous pouvez aussi utiliser le site `https://www.wolframalpha.com/`, en tapant par exemple la commande "`sqrt (2 * 3.3 * z) from 0 to 1000`". Le "`sqrt`" signifie racine carrée ("square root" en anglais), la formule correspond à notre équation $v(z)$, et le "`from 0 to 1000`" signifie qu'on veut tracer le graphe depuis $z = 0$ jusqu'à $z = 1000\,\text{m}$ où la vitesse vaut environ $80\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$.

Exercice 7 : Décollage d'un drone

1. La vitesse est la dérivée de la position. $\boxed{v(t) = \frac{dz(t)}{dt} = 0{,}8t - 0{,}09t^2}$.
2. La vitesse est dirigée vers le haut (v positive) avant d'atteindre le point le plus haut, puis vers le bas (v négative) ensuite. Elle change donc de signe.
   Ainsi $\boxed{\text{au point le plus haut, la vitesse est nulle}}$.
   On cherche le point le plus haut donc le point pour lequel $v = 0$. Ceci donne l'équation : $v(t) = 0{,}8t - 0{,}09t^2 = 0$. Une solution est $t = 0$ mais elle correspond au début du mouvement quand le drone est encore au sol et s'apprête à décoller. Cherchons une autre

solution avec $t \neq 0$, on peut donc diviser par t : $0{,}8 - 0{,}09t = 0 \Rightarrow t = \frac{0{,}8}{0{,}09} \simeq 8{,}9\,\mathrm{s}$. Le temps mis par le drone pour atteindre le point de plus haut de la trajectoire est $\boxed{t_{\mathrm{max}} = 8{,}9\,\mathrm{s}}$.

3. L'altitude max est l'altitude correspondant au temps trouvé à la question précédente : $\boxed{z_{\mathrm{max}} = z(t_{\mathrm{max}}) = 0{,}4t_{\mathrm{max}}^2 - 0{,}03t_{\mathrm{max}}^3 \simeq 10{,}5\,\mathrm{m}}$.

Exercice 8 : Particule chargée

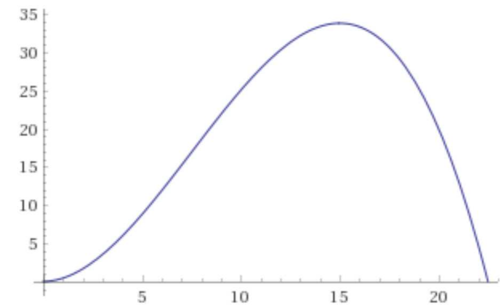
1. On dérive la vitesse :
$\boxed{\overrightarrow{v}(t) = v_x(t)\hat{u}_x + v_y(t)\hat{u}_y, \text{ avec } v_x(t) = A\omega\cos(\omega t) \text{ et } v_y(t) = -A\omega\sin(\omega t)}$.
2. On dérive à nouveau :
$\boxed{\overrightarrow{a}(t) = a_x(t)\hat{u}_x + a_y(t)\hat{u}_y, \text{ avec } a_x(t) = -A\omega^2\sin(\omega t) \text{ et } a_y(t) = -A\omega^2\cos(\omega t)}$.
3. Calculons : $x^2 + y^2 = A^2\sin(\omega t)^2 + A^2\cos(\omega t)^2 = A^2\left(\sin(\omega t)^2 + \cos(\omega t)^2\right) = A^2$.
$\boxed{x^2 + y^2 = A^2, \text{ donc la trajectoire est un cercle de rayon } A}$.

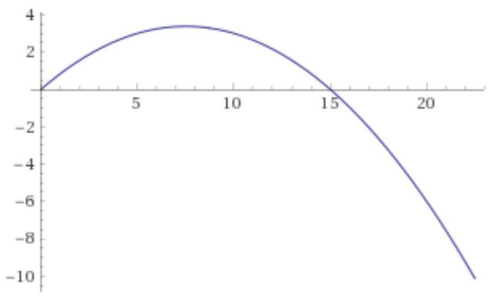
2 La mise en œuvre pour acquérir l'apprentissage

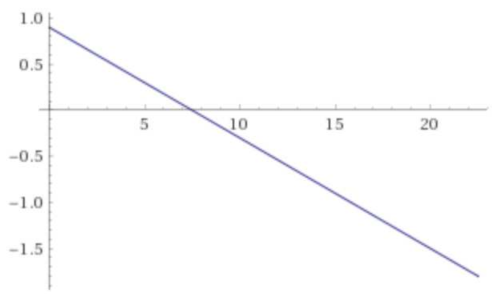
Exercice 9 : Décollage d'un drone 2

1. Le vol commence et se termine quand le drone est au sol, c'est-à-dire quand $z = 0$. Résolvons donc l'équation $z(t) = 0{,}45t^2 - 0{,}02t^3 = 0$.
Une solution évidente est $t = 0$, elle correspond au commencement du vol, quand le drone est au sol et s'apprête à décoller.
Cherchons une autre solution, c'est-à-dire avec $t \neq 0$. On peut donc diviser l'équation par t^2 et on obtient : $0{,}45 - 0{,}02t = 0 \Rightarrow t = \frac{0{,}45}{0{,}02} = 22{,}5\,\mathrm{s}$.
Le vol commence à $t = 0$ et se termine à $t = 22{,}5\,\mathrm{s}$, sa durée totale est donc $\boxed{T = 22{,}5\,\mathrm{s}}$.
2. Pour trouver un maximum d'une fonction, on regarde où la dérivée s'annule. Calculons la dérivée : $\frac{dz(t)}{dt} = 0{,}9t - 0{,}06t^2$. Cherchons quand cette dérivée s'annule : $0{,}9t - 0{,}06t^2 = 0$. Comme précédemment, une solution est $t = 0$. Cherchons une autre solution avec $t \neq 0$ en divisant par t : $0{,}9 - 0{,}06t = 0 \Rightarrow t = \frac{0{,}9}{0{,}06} = 15\,\mathrm{s}$.
On trouve deux solutions mais la solution $t = 0$ désigne le moment du décollage donc il ne correspond pas au maximum. L'altitude maximum est donc atteinte à l'instant $t_{\mathrm{max}} = 15\,\mathrm{s}$, ce qui correspond à l'altitude $\boxed{z(t_{\mathrm{max}}) = 0{,}45 \times 15^2 - 0{,}02 \times 15^3 \simeq 34\,\mathrm{m}}$.
3. La vitesse est la dérivée de la position par rapport au temps : $v(t) = \frac{dz(t)}{dt} = 0{,}9t - 0{,}06t^2$.
Le décollage correspond à l'instant $t = 0$, on a donc $\boxed{v(t = 0) = 0}$.
L'atterrissage correspond au temps $t_{\mathrm{f}} = 22{,}5\,\mathrm{s}$, on a alors
$\boxed{v(t = 22.5) = 0{,}9 \times 22{,}5 - 0{,}06 \times 22{,}5^2 \simeq -10\,\mathrm{m\,s^{-1}}}$.
4. Comme pour la question 2, on cherche le maximum en dérivant la fonction et en regardant quand cette dérivée s'annule. La dérivée est : $\frac{dv(t)}{dt} = 0{,}9 - 0{,}12t$
Si la dérivée vaut zéro, on a : $0{,}9 - 0{,}12t = 0 \Rightarrow t = \frac{0{,}9}{0{,}12} = 7{,}5\,\mathrm{s}$. La vitesse maximale est donc atteinte à la moitié (temporelle) de l'ascension.
Valeur de la vitesse max : $\boxed{v(t = 7.5) = 0{,}9 \times 7{,}5 - 0{,}06 \times 7{,}5^2 \simeq 3{,}4\,\mathrm{m\,s^{-1}}}$. On peut remarquer que le drone tombe au sol ($-10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ à l'atterrissage) nettement plus vite qu'il ne s'est élevé dans les airs (max $3{,}4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$) !

5. L'accélération est la dérivée de la vitesse, on a donc : $a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = 0{,}9 - 0{,}12t$.
   Au moment du décollage : $\boxed{a(t=0) = 0{,}9\,\mathrm{m\,s^{-2}}}$, et au moment de l'atterrissage : $\boxed{a(t=22.5) = 0{,}9 - 0{,}12 \times 22{,}5 = -1{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}}}$.
6. Les fonctions en question ne sont pas simple, il faudrait donc faire une étude de fonctions complète pour pouvoir tracer les graphes à la main. On peut aussi tracer les graphes à l'aide d'outils informatiques, par exemple le site `https://www.wolframalpha.com/`. On obtient les graphes suivants. La phase d'ascension se situe entre $t = 0$ et $t = 15\,\mathrm{s}$, la phase de descente entre $t = 15\,\mathrm{s}$ et $t = 22{,}5\,\mathrm{s}$. On peut observer toutes les valeurs calculées précédemment sur ces graphes.







Exercice 10 : Particule chargée accélérée 2

1. On note que $\frac{q}{m}E$ est une constante, donc la vitesse est de la forme $\vec{v}(t) = \frac{q}{m}Et\hat{u}_x + \overrightarrow{\text{constante}}$. On utilise la condition initiale pour déterminer la constante : $v_x(t=0) = 540\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, les autres composantes étant nulles. Le problème est donc entièrement contenu

suivant l'axe Ox. On obtient alors $v_x(t=0) = \frac{q}{m}E \times 0 + \text{constante}$, donc constante $= v_x(t=0) = 540\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$. On l'appellera $v_{x,0}$ pour plus simplicité.
Finalement, $\boxed{\vec{v}(t) = \left(\frac{q}{m}Et + v_{x,0}\right)\hat{u}_x}$ avec $v_{x,0} = 540\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$.

2. Le point M va maintenant désigner la position de la particule. En intégrant l'expression de la vitesse, on obtient : $\overrightarrow{OM}(t) = \left(\frac{q}{m}E\frac{t^2}{2} + v_{x,0}t\right)\hat{u}_x + \overrightarrow{\text{constante}}$. Or la particule est à l'origine à $t=0$ et on voit que $\overrightarrow{OM}(t=0) = \overrightarrow{\text{constante}}$, donc $\overrightarrow{\text{constante}} = \vec{0}$. Finalement, $\boxed{\overrightarrow{OM}(t) = \left(\frac{q}{2m}Et^2 + v_{x,0}t\right)\hat{u}_x}$ avec $v_{x,0} = 540\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$.

Exercice 11 : Vitesse scalaire d'un gratte-ciel

1. La distance parcourue par le haut du gratte-ciel pendant une période complète est de deux fois la distance entre les positions extrêmes : aller + retour. Cette distance entre positions extrêmes est de $2 \times 1{,}3 = 2{,}6\,\text{m}$: $1{,}3\,\text{m}$ d'un côté et de l'autre.
On a donc une distance totale sur une période de $2 \times 2{,}6 = 5{,}2\,\text{m}$.
La durée du parcours est de $5{,}8\,\text{s}$, on suppose que l'accéléromètre nous donne bien une période complète.
La vitesse scalaire moyenne est donc $\boxed{< v >= \frac{5{,}2}{5{,}8} = 0{,}90\,\text{m}\,\text{s}^{-1}}$.
2. Si le gratte-ciel oscille sans plier, la tangente de l'angle max vaut $\frac{1{,}3\,\text{m}}{350\,\text{m}} = 0{,}003\,7$, ce qui correspond à un angle de $0{,}21°$.

Exercice 12 : Particule chargée accélérée 3

1. On dérive la vitesse composante par composante et on obtient
$\boxed{\vec{v}(t) = v_x(t)\hat{u}_x + v_y(t)\hat{u}_y, \text{ avec } v_x(t) = 2at \text{ et } v_y(t) = -y_0\omega\sin(\omega t)}$.
2. On dérive à nouveau et on obtient
$\boxed{\vec{a}(t) = a_x(t)\hat{u}_x + a_y(t)\hat{u}_y, \text{ avec } a_x(t) = 2a \text{ et } a_y(t) = -y_0\omega^2\cos(\omega t)}$.
3. On peut commencer par exprimer t en fonction de x : $x = at^2$ donc $t = \sqrt{\frac{x}{a}}$.
Utilisons cette expression de t dans $y(t)$: $\boxed{y(x) = y_0\cos(\omega\sqrt{\frac{x}{a}})}$. La trajectoire va donc être une sorte de sinusoïde qui oscille de plus en plus lentement à cause du terme $\sqrt{x}$ dans le cosinus. Voir courbe sur `https://www.wolframalpha.com/`, rechercher par exemple `cos(sqrt(x)) from 0 to 1000`.

Exercice 13 : Cinématique 1D à accélération constante

1. On sait que $x(t)$ est une distance exprimée en mètres. Les deux termes v_0t et $\frac{1}{2}at^2$ sont donc également des distances. Comme t est un temps, on a $[v_0] \times temps = distance$ et donc $\boxed{[v_0] = \frac{distance}{temps} = \text{m}\,\text{s}^{-1}}$. De la même manière, on trouve que $\boxed{[a] = \frac{distance}{temps^2} = \text{m}\,\text{s}^{-2}}$.
$\boxed{v_0 \text{ représente la vitesse initiale de la moto et } a \text{ son accélération.}}$
2. La vitesse est la dérivée de la position par rapport au temps : $\boxed{v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt} = v_0 + at}$.
3. Comme le mouvement s'effectue en ligne droite selon l'axe x, on a $v_x(t) = v(t)$ et donc $v^2 = v_0^2 + 2v_0at + a^2t^2 = v_0^2 + 2a(v_0t + \frac{1}{2}at^2) = v_0^2 + 2ax$. On a bien $\boxed{v^2 = v_0^2 + 2ax}$.

4. Utilisons la formule de la question précédente lors de la phase d'accélération : $v_1^2 = v_0^2 + 2a_1x_1$ (le petit 1 est un repère pour la phase d'accélération).
L'accélération constante est $a_1 = 2{,}6\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, la vitesse initiale est $v_0 = 0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ (moto à l'arrêt), et la position initiale est $x = 0\,\mathrm{m}$ donc la position à la fin de la phase d'accélération est $x_1 = 120\,\mathrm{m}$.
On a alors $v_1^2 = 0 + 2 \times 2{,}6 \times 120 = 624\,\mathrm{m^2\,s^{-2}}$.
La vitesse à la fin de la phase d'accélération est donc $v_1 = \sqrt{624} = 25\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.
Même méthode pour la phase de décélération : $v_2^2 = v_1^2 + 2a_2x_2$. La vitesse initiale est $v_1 = 25\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, la vitesse finale $v_2 = 12\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, l'accélération $a_2 = -1{,}5\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ et on cherche la distance de décélération x_2.
On a donc $12^2 = 25^2 + 2 \times -1{,}5 \times x_2 \Rightarrow 144 = 625 - 3 \times x_2 \Rightarrow x_2 = \frac{625-144}{3}$. Finalement, $\boxed{x_2 = 160\,\mathrm{m}}$.
5. La vitesse scalaire moyenne est $< v >= \frac{\text{distance parcourue}}{\text{temps de parcours}}$. La distance totale est ici de $x_1 + x_2 = 120 + 160 = 280\,\mathrm{m}$.
Calculons le temps de parcours. On utilise la formule de la question 2 pour la phase d'accélération et on appelle t_1 la durée de cette phase : $v_1(t_1) = v_0 + a_1t_1$ avec $v_0 = 0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, $v_1 = 25\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $a_1 = 2{,}6\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. On a donc $25 = 0 + 2{,}6 \times t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{25}{2.6} = 9{,}6\,\mathrm{s}$.
Même méthode pour la décélération, d'une durée t_2 : $v_2(t_2) = v_1 + a_2t_2 \Rightarrow 12 = 25 - 1{,}5 \times t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{25-12}{1{,}5} = 8{,}7\,\mathrm{s}$.
Finalement, la durée totale est $t_1 + t_2 = 9{,}6 + 8{,}7 = 18{,}3\,\mathrm{s}$.
Enfin la vitesse scalaire moyenne est $\boxed{< v >= \frac{280}{18{,}3} = 15\,\mathrm{m\,s^{-1}}}$.

Exercice 14 : Composition des vitesses

1. Pour $v << c$, le terme $\frac{vv'_x}{c^2}$ est négligeable devant 1 et la loi de composition des vitesses devient $v_x = v + v'_x$
2. Nous obtenons $v_x = c$ pour $v'_x = c$. La vitesse de la lumière est invariante par changement de référentiel, contrairement à ce que l'intuition pourrait laisser croire.

Exercice 15 : Vol d'un avion

1. Soit D la distance entre A et B. Le temps mis pour faire un aller retour sans vent à pour expression $T = \frac{2D}{v}$. Le temps mis pour faire un aller retour avec le vent a pour expression $T' = \frac{D}{v+u} + \frac{D}{v-u} = T\frac{v^2}{v^2-u^2}$ d'où $T = T'\left(1 - \frac{u^2}{v^2}\right)$. Nous avons donc $T < T'$.