Mécanique

Acquis d'apprentissage n°3 : vecteurs position, vitesse et accélération dans un repère cartésien

Consignes : Justifier toutes les réponses. Une réponse correcte non justifiée est considérée comme fausse en devoir. Soigner la rédaction des réponses et respecter les notations de l'énoncé. Une réponse qui utilise une autre notation est considérée comme fausse en devoir.

Cette série d'exercices doit vous permettre de maîtriser les savoir-faire suivants :

1. Savoir calculer la vitesse et l'accélération à partir de la position.
2. Savoir identifier et déterminer des conditions initiales.
3. Savoir calculer la vitesse et la position à partir de l'accélération.
4. Savoir déterminer une hauteur maximale atteinte.
5. Savoir déterminer l'équation d'une trajectoire.

---

1 Les savoir-faire à connaître

Savoir calculer la vitesse et l'accélération à partir de la position

Notion de cours à connaître : le vecteur vitesse se calcule en dérivant le vecteur vitesse : $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$. L'accélération se calcule en dérivant le vecteur vitesse : $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$.

Exercice 1 : Mouvement dans un plan

On considère un corps qui se déplace dans un plan. La position du corps en fonction du temps est donnée par $\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\widehat{u}_x + y(t)\widehat{u}_y$ avec $x(t) = \frac{C_1}{2}t^2$ et $y(t) = C_2t + y_0$ où t est le temps écoulé en secondes et C_1, C_2 et y_0 sont des constantes.

1. Déterminer l'expression de $\vec{v}$.
2. Montrer que la vitesse scalaire (la norme de la vitesse) a pour expression $||\vec{v}|| = \sqrt{{C_1}^2t^2 + {C_2}^2}$. En déduire que la vitesse scalaire à $t = 1\,\mathrm{s}$ vaut $v \simeq 4{,}1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ pour $C_1 = 1\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ et $C_2 = 4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.
3. Montrer que le vecteur accélération a pour expression $\vec{a} = C_1\widehat{u}_x$.

Exercice 2 : Course à pied

Un étudiant part faire un jogging. En manque de condition physique, sa position en kilomètres au cours du temps obéit assez bien à l'équation $x(t) = 5.4 - 5.4e^{-1.5t}$ où t est le temps écoulé depuis le départ en heures.

1. Donner les valeurs de $x(t = 0)$ et $x(t = +\infty)$. Tracer le graphe de $x(t)$.
   Outil mathématique à utiliser : revoir le rappel sur les fonctions usuelles et leurs graphes dans le cours si besoin.
2. Déterminer l'expression de $v(t)$ en $\mathrm{km\,h^{-1}}$. Montrer que sa vitesse vaut $v \simeq 1{,}8\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ au bout d'une heure de course.

Exercice 3 : Particule chargée accélérée

Supposons que la position d'une particule chargée accélérée par un accélérateur de particules soit donnée par la fonction vectorielle $\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\widehat{u}_x + y(t)\widehat{u}_y$ avec $x(t) = a_x\frac{t^2}{2}$ et $y(t) = y_0\cos(\omega t)$ où a_x, y_0 et ω sont des constantes.

1. Déterminer l'expression de $\vec{v}$.

   Outil mathématique à utiliser : il faut utiliser la dérivation d'une fonction composée. Rappel : soit $f(x) = v(u(x))$ une fonction composée, sa dérivée a pour expression $f'(x) = v'(u(x))u'(x)$.

2. Montrer que l'accélération de la particule a pour expression $\vec{a} = a_x\widehat{u}_x - y_0\omega^2\cos(\omega t)\widehat{u}_y$.

Savoir identifier et déterminer des conditions initiales

Exercice 4 : Lancé de pomme

Un étudiant lance une pomme verticalement. La position de la pomme est donnée par la fonction vectorielle $\overrightarrow{OM}(t) = z(t)\widehat{u}_z$ avec $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t + z_0$ en mètres où t est le temps écoulé en secondes et Oz est un axe vertical orienté positivement vers le haut.

1. Donner les unités de g, v_0 et z_0 dans le système international.
2. Montrer que la composante de la vitesse suivant Oz a pour expression $v_z(t) = -gt + v_0$.
3. La pomme est lancée de telle sorte que $v_z(t=0) = 3{,}0\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ et $z(t=0) = 1{,}5\,\mathrm{m}$. En déduire les valeurs de v_0 et z_0.

Savoir calculer la vitesse et la position à partir de l'accélération

Notion de cours à connaître : les vecteurs vitesse et position se calculent en primitivant successivement le vecteur accélération. Attention, puisque la dérivée d'une constante est nulle, il faut introduire une constante par composante à chaque étape. Les constantes se déterminent en général grâce aux conditions initiales.

Exercice 5 : Décollage d'une fusée

L'évolution temporelle du vecteur accélération d'une fusée au décollage est donnée par $\vec{a}(t) = \frac{a\sqrt{\tau}}{\sqrt{t}}\widehat{u}_z$ avec $a = 3{,}3\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, τ une constante et Oz un axe vertical orienté positivement vers le haut. La fusée est en $z = 0$ à $t = 0$ avec une vitesse nulle à $t = 0$.

1. Déterminer l'expression du vecteur vitesse de la fusée.

   Outil mathématique à utiliser : il faut utiliser les primitives usuelles. En cas de trou de mémoire, vous pouvez utiliser la dérivée d'une fonction puissance, vous avez $\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + cst\right)' = x^n$. La primitive de x^n est donc $\frac{x^{n+1}}{n+1} + cst$.

2. Montrer que le vecteur position de la fusée a pour expression $\overrightarrow{OM} = \frac{4a\sqrt{\tau}}{3}t^{3/2}\widehat{u}_z$.
3. A quelle altitude est la fusée au bout de $60\,\mathrm{s}$ si $\tau = 1$?

Exercice 6 : Décollage d'une fusée 2

L'évolution temporelle du vecteur accélération d'une fusée au décollage est donnée par

$\vec{a}(t) = a\widehat{u}_z$ avec $a = 3{,}3\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ et Oz un axe vertical orienté positivement vers le haut. La fusée est en $z = 0$ à $t = 0$. On suppose que la fusée à une trajectoire verticale.

1. Déterminer l'expression de composante de la vitesse $v(t)$ selon l'axe Oz.
2. Déterminer l'expression de $z(t)$.
3. Montrer que la vitesse en fonction de l'altitude de la fusée a pour expression $v(z) = \sqrt{2az}$. Tracer le graphe de $v(z)$.

Savoir déterminer une hauteur maximale atteinte

Notion de cours à connaître : Pour déterminer une hauteur maximale atteinte par un corps, il faut utiliser le fait que la composante verticale de la vitesse est nulle au point le plus haut.

Exercice 7 : Décollage d'un drone

Un drone vole suivant un axe vertical. Pendant la manœuvre, la hauteur z du drone par rapport au sol, en mètres, est donnée par $z(t) = 0,4t^2 - 0,03t^3$ où t est le temps écoulé en secondes.

1. Déterminer l'expression de $v(t)$.
2. Que vaut la vitesse au point le plus haut atteint par le drone. En déduire le temps mis par le drone pour atteindre le point le plus haut de sa trajectoire.
3. En déduire que l'altitude maximale atteinte par le drone vaut $10{,}5\,\mathrm{m}$.

Savoir déterminer une trajectoire

Notion de cours à connaître : La trajectoire représente l'ensemble des positions successives prises par un corps dans l'espace. Le temps ne doit donc plus apparaître dans l'équation mathématique d'une trajectoire.

Exercice 8 : Particule chargée

Supposons que la position d'une particule chargée soit donnée par la fonction vectorielle $\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\widehat{u}_x + y(t)\widehat{u}_y$ avec $x(t) = A\sin(\omega t)$ et $y(t) = A\cos(\omega t)$ où A et ω sont des constantes.

1. Déterminer l'expression de la fonction vectorielle $\vec{v}(t)$.
2. Déterminer la fonction vectorielle $\vec{a}(t)$.
3. Déterminer l'expression de $x^2 + y^2$. En déduire que la forme de la trajectoire de la particule dans le plan Oxy est un cercle et déterminer l'expression du rayon du cercle.

   Outil mathématique à utiliser : un cercle de rayon R centré en $(0, 0)$ a pour équation $x^2 + y^2 = R^2$ dans un repère cartésien xOy.

2 La mise en œuvre pour acquérir l'apprentissage

Pour chaque question **identifier le ou les savoir-faire** misent en jeu en utilisant la numérotation des savoir-faire du chapeau de la feuille d'exercices.

Exercice 9 : Rencontre entre deux cylistes

On considère deux cyclistes qui roulent en ligne droite le long d'un axe noté Ox. Le premier cycliste part en $x = 0$ à $t = 0$ avec une vitesse initiale $v_{x1}(t = 0) = v_0$ et n'accélère pas ($\vec{a}_1 = \vec{0}$) au cours de son mouvement. Le second cycliste part en $x = L$ à $t = 0$ avec une vitesse initiale égale à $v_{x2}(t = 0) = -v_1$ (c'est-à-dire que le cycliste 2 roule en sens inverse du cycliste 1) et n'accélère pas ($\vec{a}_2 = \vec{0}$) au cours de son mouvement.

1. Montrer que la position du cycliste 1 est donnée par $x_1 = v_0 t$.
2. Montrer que la position du cycliste 2 est donnée par $x_2 = L - v_1 t$.
3. Déterminer l'expression du temps auquel les deux cyclistes se rencontrent.
4. En déduire que les deux cyclistes se rencontrent en $x_r = \frac{v_0 L}{v_0+v_1}$.

On considère maintenant deux cyclistes qui roulent en ligne droite le long d'un axe noté Ox mais le second cycliste part en $x = L$ à $t = 0$ avec une vitesse initiale nulle et roule avec une accélération constante donnée par $\vec{a}_2 = -a\widehat{u}_x$ où a est une constante. Le premier cycliste ne change rien à son mouvement.

5. Montrer que la position du cycliste 1 est donnée par $x_1 = v_0 t$.
6. Montrer que la position du cycliste 2 est donnée par $x_2 = L - \frac{a}{2}t^2$.
7. Déterminer l'expression du temps auquel les deux cyclistes se rencontrent.
   Outil mathématique à utiliser : vous devez résoudre une équation du second degré et garder la solution positive.
8. En déduire la position x_r de la rencontre entre les deux cyclistes.

Exercice 10 : Décollage d'un drone 2

Un drone vole suivant un axe vertical. Pendant la manœuvre, la hauteur z du drone par rapport au sol, en mètres, est donnée par $z(t) = 0,45t^2 - 0,02t^3$ où t est le temps écoulé en secondes.

1. Déterminer la durée totale T du vol.
2. Déterminer l'altitude max atteinte par le drone.
3. Calculer la vitesse du drone au moment du décollage et au moment de l'atterrissage.
4. Calculer la vitesse max atteinte par le drone dans la phase d'ascension.
5. Calculer l'accélération du drone au moment du décollage et au moment de l'atterrissage.
6. Tracer les graphes de $z(t)$, $v(t)$ et $a(t)$ en fonction du temps. Indiquer sur le graphe la phase d'ascension et la phase de descente du drone.

Exercice 11 : Particule chargée accélérée 2

Supposons que le vecteur accélération d'une particule chargée de masse m et de charge q ait pour expression $\vec{a}(t) = \frac{q}{m}E\widehat{u}_x$ où E est une constante. Nous verrons plus tard que E est le champ électrique. La particule a une vitesse initiale $v_x(t = 0) = 540\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ (les autres composantes de la vitesse sont nulles) et est à l'origine du repère à $t = 0$.

1. Déterminer l'expression de $\vec{v}$.
2. Déterminer l'expression de $\overrightarrow{OM}(t)$.

Exercice 12 : Particule chargée accélérée 3

Supposons que la position d'une particule chargée accélérée par un accélérateur de particules soit donnée par la fonction vectorielle $\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\widehat{u}_x + y(t)\widehat{u}_y$ avec $x(t) = at^2$ et $y(t) = y_0\cos(\omega t)$ où a, y_0 et ω sont des constantes.

1. Déterminer l'expression de $\vec{v}$.
2. Déterminer l'expression de $\vec{a}$.
3. Déterminer l'expression de $y(x)$ qui est la fonction mathématique représentant la trajectoire de la particule. En déduire la forme de la trajectoire de la particule dans le plan Oxy.

Exercice 13 : Cinématique 1D à accélération constante

La position d'une moto qui roule sur une ligne droite avec une accélération constante est donnée par la fonction vectorielle $\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\widehat{u}_x$ avec $x(t) = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$.

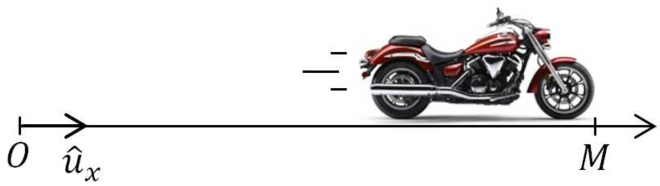

FIGURE 1 – Moto qui roule en ligne droite.

1. Donner les dimensions de v_0 et a. Que représentent ces deux grandeurs ?
2. Déterminer l'expression de la fonction $v_x(t)$.
3. Montrer que $v^2 = v_0^2 + 2ax$.
4. Application : une moto à l'arrêt accélère pendant 120 m avec une accélération constante de 2,6 m s^{-2}. La moto ralentit ensuite avec une accélération constante de −1,5 m s^{-2} pour atteindre la vitesse de 12 m s^{-1}. Trouver la distance sur laquelle la moto ralentit.
5. Quelle est la vitesse scalaire moyenne de la moto sur l'ensemble de son parcours ?

3 Pour aller plus loin : la composition des vitesses

Exercice 14 : Composition des vitesses

Soit un référentiel R' en translation à la vitesse $\vec{u}$ par rapport à un référentiel R selon l'axe $\widehat{u}_x$. La loi de composition des vitesses a pour expression :

$$v_x = \frac{u + v'_x}{1 + \frac{uv'_x}{c^2}}$$

où c est la vitesse de la lumière dans le vide.

1. Montrer que la composition Galiléenne des vitesses correspond au cas où $u << c$.
2. Quelle est la valeur de v_x pour $v'_x = c$? Commentaires.

Exercice 15 : Vol d'un avion

Un avion vole en ligne droite d'un point A à un point B à une vitesse constante v par rapport à l'air. Le vent souffle de A vers B à la vitesse u par rapport au sol. Est-ce que l'avion met plus de temps, moins de temps ou la même durée à faire l'aller-retour entre A et B que lorsqu'il n'y a pas de vent ?