

Mécanique

Acquis d'apprentissage n°2 : le principe d'inertie - solution

1 Les savoir-faire à connaître

Exercice 1 : Bloc sur un plan incliné

Le bloc est à l'équilibre, donc toutes les forces qui s'appliquent sur lui se compensent. Autrement dit, $\vec{P} + \vec{R}_N + \vec{R}_T = \vec{0}$. On peut projeter cette équation sur les axes Ox et Oy pour obtenir des équations utiles.

Suivant Ox : $\vec{P} \cdot \hat{u}_x + \vec{R}_N \cdot \hat{u}_x + \vec{R}_T \cdot \hat{u}_x = 0 \Rightarrow -P \sin(\alpha) + 0 + R_T = 0$. On obtient $R_T = mg \sin(\alpha)$.

Suivant Oy : $\vec{P} \cdot \hat{u}_y + \vec{R}_N \cdot \hat{u}_y + \vec{R}_T \cdot \hat{u}_y = 0 \Rightarrow -P \cos(\alpha) + R_N + 0 = 0$. On obtient $R_N = mg \cos(\alpha)$.

1. On a déjà résolu cette question en partie grâce aux équations précédentes : $R_T = mg \sin(\alpha)$.

Calculons sa valeur : $R_T = 0,750 \times 9,81 \times \sin(34^\circ) = 4,11 \text{ N}$.

2. En utilisant les deux équations obtenues avant la question 1, on a : $\frac{R_T}{R_N} = \frac{mg \sin(\alpha)}{mg \cos(\alpha)} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$,

donc $\frac{R_T}{R_N} = \tan(\alpha)$.

3. La masse reste immobile du temps que $R_T \leq \mu R_N$, où μ est le coefficient de frottement statique. Ainsi, au moment précis où la masse commence à glisser, on a : $R_T = \mu R_N$.

4. La masse commence à glisser dès qu'on atteint l'angle $\alpha = 48^\circ$. Pour cette valeur d'angle, on a donc $R_T = \mu R_N$ comme expliqué dans la question précédente. On peut ré-écrire $\frac{R_T}{R_N} = \mu$. Or $\frac{R_T}{R_N} = \tan(\alpha)$, donc $\mu = \tan(\alpha) = \tan(48^\circ) = 1,11$.

Exercice 2 : Saut en parachute

1. Le principe d'inertie est applicable pour $t \in [t_1; t_2]$ et $[t_3; t_4]$.
2. t_0 : début de la chute. t_1 : la vitesse max est atteinte parachute fermé. t_2 : ouverture du parachute. t_3 : la vitesse max est atteinte parachute ouvert. t_5 : atterrissage.
3. On projète le principe d'inertie sur l'axe verticale orienté vers le bas pour obtenir $-C_S v^2 + mg = 0$ d'où $v = \sqrt{\frac{mg}{C_S}}$.
4. La relation précédente montre que $\frac{S_2}{S_1} = \frac{v_1^2}{\frac{v_2^2}{2}} \simeq 177$.
5. f augmente de t_0 à t_1 puis se stabilise à mg . Il y a pic entre t_2 et t_3 puis la force de frottement redevient égale à mg .

Exercice 3 : Masses en équilibre

1. Le principe d'inertie appliqué à la masse s'écrit $\vec{T}_1 + \vec{P} = \vec{0}$. On projète sur un axe vertical pour obtenir $T_1 = Mg$.
2. Le système est maintenant {masse+fil}, le principe d'inertie s'écrit $\vec{T} + \vec{P}_{fil} + \vec{P} = \vec{0}$. La masse du fil est négligeable devant la masse du bloc, on néglige donc \vec{P}_{fil} . On projète ensuite sur un axe vertical pour obtenir $T = Mg$.

Exercice 4 : Masses en équilibre

1. Le principe d'inertie appliqué à la masse 2 s'écrit $\vec{T}_2 + \vec{P}_2 = \vec{0}$. On projète sur un axe vertical pour obtenir $T_2 = m_2g$.
2. La masse du fil (inextensible) est négligeable, la tension dans le fil est donc la même en tout point. Le principe d'inertie appliqué à la masse 1 s'écrit $\vec{T}_2 + \vec{T}_1 + \vec{P}_1 = \vec{0}$. On projète sur un axe vertical orienté positivement vers le haut pour obtenir $-T_2 + T_1 - m_1g = 0$ d'où $T_1 = T_2 + m_1g = (m_2 + m_1)g$.

Exercice 5 : Masses en équilibre

1. Le système masse M_2 subit son poids \vec{P}_2 au niveau de son centre de gravité, et la force de tension du fil \vec{T}_2 au niveau du milieu de sa face supérieure.
Le poids est dirigé vers le bas et d'intensité M_2g , et la tension \vec{T}_2 dirigée vers le haut.
L'équilibre du système nous apprend que la somme de ces forces est nulle : $\vec{P}_2 + \vec{T}_2 = \vec{0}$.
Ceci implique que $T_2 = \|\vec{T}_2\| = M_2g$.
2. Le système masse M_1 subit son poids \vec{P}_1 au niveau de son centre de gravité, la réaction normale du support \vec{R}_{N1} et la force de frottement du support \vec{R}_{T1} au niveau du milieu de sa face inférieure, et enfin la force de tension du fil \vec{T}_1 au niveau du milieu de sa face droite.
Le poids est dirigé vers le bas et d'intensité M_1g , la force normale est dirigée vers le haut, la force de frottement vers la gauche, et la tension du fil vers la droite.
3. L'équilibre du système nous apprend que la somme des forces est nulle : $\vec{P}_1 + \vec{R}_{N1} + \vec{R}_{T1} + \vec{T}_1 = \vec{0}$. Si on projette cette équation sur l'axe vertical, on en déduit que la force normale du support compense le poids : $M_1g = R_{N1}$. Si on la projette sur l'axe horizontal, on voit que la force de frottement du support compense la tension du fil : $R_{T1} = T_1$.
Or, on sait que du temps qu'un objet est immobile sur un support, la force de frottement qui s'applique sur lui est inférieure au produit du coefficient de frottement statique et de la force normale (quand on a égalité ça commence à glisser) : $R_{T1} \leq \mu R_{N1}$. Cette inégalité peut se ré-écrire grâce aux formules précédentes : $T_1 \leq \mu M_1g$.
Maintenant on peut utiliser le fait que le fil est inextensible et donc que la tension à ses extrémités est de même intensité, sinon il se déplacerait. On a donc $T_1 = T_2$, et l'équation précédente devient : $T_2 \leq \mu M_1g$. Or on avait montré en question 1 que $T_2 = M_2g$. Finalement, on a $M_2g \leq \mu M_1g$, donc $M_2 \leq \mu M_1$. La masse M_2 doit être inférieure à μM_1 pour que le système soit à l'équilibre et ne glisse pas.
4. Le système fil subit une force de tension $-\vec{T}_1$ à son extrémité gauche, dirigée vers la gauche ; elle subit également une tension $-\vec{T}_2$ à son extrémité droite, dirigée vers le bas ; enfin une dernière force est celle de la poulie qui pousse sur le fil avec une force normale \vec{R}_N .
Le fil est en équilibre, ce qui implique que la somme des forces est nulle : $-\vec{T}_1 - \vec{T}_2 + \vec{R}_N = \vec{0}$, autrement dit $\vec{R}_N = \vec{T}_1 + \vec{T}_2$. Puisque T_1 et T_2 sont de même intensité, on en déduit que la réaction normale de la poulie est d'intensité $R_N = \sqrt{2}T_1 = \sqrt{2}T_2 = 2M_2g \cos(45^\circ)$, et est dirigée en haut à droite avec un angle de 45° avec les axes horizontal et vertical.

2 La mise en œuvre pour maîtriser l'apprentissage

Exercice 6 : Mesure de l'accélération de la pesanteur

1. Les forces s'exerçant sur la masse sont son poids $-mg$ (négatif car vers le bas) et la force de rappel du ressort kh (positif car vers le haut). On n'utilise pas de vecteurs dans cet exercice puisque tout se passe le long de l'axe vertical.

La masse est à l'équilibre, donc $-mg + kh = 0$, ainsi $g = \frac{kh}{m}$.

2. $g = \frac{33 \times 59,5 \cdot 10^{-3}}{0,2} = 9,8 \text{ m s}^{-2}$.

Exercice 7 : Vitesse de chute d'un nuage

1. On nous dit que la goutte d'eau atteint très rapidement une vitesse limite. On se place dans cette limite et on a donc une vitesse constante pour la goutte d'eau. Son accélération est par conséquent nulle, ce qui implique que la somme des forces est nulle.

Il y a le poids \vec{P} dirigé vers le bas ainsi que la poussée d'Archimède \vec{F}_A dirigée vers le haut, et enfin la force de frottement \vec{f} comme expliqué dans l'énoncé. Toutes ces forces sont alignées avec l'axe vertical, on peut donc ignorer leur caractère vectoriel et ne raisonner que selon cet axe qu'on oriente vers le haut : $-P + F_A + f = 0$ (il y a un + four f puisque les frottements s'opposent au mouvement et que la goutte tombe vers le bas).

On a $P = mg$, $F_A = \rho_{\text{air}} Vg$ et $f = 6\pi\eta r v$ où v est la norme de la vitesse. La masse m de la goutte peut se calculer facilement à partir de son volume et de la masse volumique de l'eau : $m = \rho_{\text{eau}} V$.

On obtient $-\rho_{\text{eau}} Vg + \rho_{\text{air}} Vg + 6\pi\eta r v = 0$ donc $(\rho_{\text{air}} - \rho_{\text{eau}}) Vg + 6\pi\eta r v = 0$, et finalement $\Delta\rho Vg = 6\pi\eta r v$.

2. On suppose que la goutte d'eau est sphérique, ce qui nous donne son volume : $V = \frac{4}{3}\pi r^3$. On obtient donc $\Delta\rho \frac{4}{3}\pi r^3 g = 6\pi\eta r v$. On divise par $2\pi r$ de chaque côté de l'équation :

$$\Delta\rho \frac{2}{3} r^2 g = 3\eta v. \text{ On peut alors ré-écrire : } v = \Delta\rho \frac{2r^2 g}{9\eta}.$$

3. On connaît $\rho_{\text{eau}} = 1000 \text{ kg m}^{-3}$, et on obtient $v = (1000 - 0,46) \times \frac{2 \times (10^{-6})^2 \times 9,81}{9 \times 1,8 \cdot 10^{-5}}$ soit

$$v = 121 \mu\text{m s}^{-1}.$$

Exercice 8 : Force d'interaction gravitationnelle

1. La force d'interaction gravitationnelle qui s'exerce entre le Soleil et la Terre a pour norme $F_{S/T} = G \frac{M_S M_T}{d_{S/T}^2}$ avec M_S et M_T les masses respectives du Soleil et de la Terre, $d_{S/T}$ la distance moyenne Soleil - Terre, et G la constante gravitationnelle. Les valeurs sont prises de Wikipédia et on obtient :

$$F_{S/T} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{5,97 \cdot 10^{24} \times 1,99 \cdot 10^{30}}{(150 \cdot 10^9)^2} = 3,52 \times 10^{22} \text{ N}.$$

2. Même calcul en remplaçant le Soleil par la Lune : $F_{L/T} = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{5,97 \cdot 10^{24} \times 7,35 \cdot 10^{22}}{(384 \cdot 10^6)^2} = 1,98 \times 10^{20} \text{ N}.$

Calculons le rapport $\frac{F_{L/T}}{F_{S/T}} = \frac{1,98 \cdot 10^{20}}{3,52 \cdot 10^{22}} = 5,63 \cdot 10^{-3}$. Cette grandeur est sans unité.

Il montre que la force entre la Lune et la Terre vaut environ 0,6% de la force entre le Soleil et la Terre.

Exercice 9 : Pont de l'Iroise

1. Pour ce calcul, il est plus simple de considérer le plus grand hauban, celui qui part du haut du pylône. L'angle α qu'on veut calculer a pour hypoténuse la longueur du hauban, pour côté adjacent la distance 160 m et pour côté opposé la hauteur 75 m. On a donc $\tan(\alpha) = \frac{75}{160}$ et on trouve $\alpha = 25^\circ$.

- Le poids s'applique au centre du pont, vers le bas. Les quatre réactions normales sont dirigées vers le haut au niveau des deux piles et des deux culées. Chaque hauban produit une force dirigée suivant la direction du hauban, en direction du pylône.
- Le pont est à l'équilibre, donc la somme des forces qui s'appliquent sur lui est nulle. Si on appelle \vec{P} le poids du pont, \vec{R}_N la somme des forces normales, et \vec{T} la somme des tensions des haubans, on a : $\vec{P} + \vec{R}_N + \vec{T} = \vec{0}$.

On nous dit que la moitié du poids est supportée par les piles et les culées, autrement dit $\vec{R}_N = -\frac{1}{2}\vec{P}$. Donc il reste l'autre moitié du poids qui est supportée par les haubans : $\vec{T} = -\frac{1}{2}\vec{P} = -\frac{1}{2}m\vec{g}$.

Attention la tension dans un hauban présente un angle α par rapport au poids, il y a une composante horizontale de la tension qui ne sert pas à compenser le poids, et une composante verticale qui compense le poids. En fait on peut projeter l'équation précédente sur l'axe horizontal et prouver que la somme des composantes horizontales des tensions s'annule, ce qui est logique puisque le pont ne se déplace pas ni à droite ni à gauche ! On ne va donc garder que les composantes verticales des tensions. Appelons T_y la somme des composantes verticales des tensions, on a alors : $T_y = \|\vec{T}\| \sin(\alpha)$.

On exprime que ces tensions compensent le poids : $T_y = \frac{1}{2}mg$. Or, il y a $n = 4 \times 26 = 104$ haubans, donc $T_y = nt_y$ où t_y est la tension verticale dans un hauban. Finalement, on obtient $t_y = \frac{T_y}{n} = \frac{mg}{2n}$, et la tension totale dans un hauban est $t = \frac{t_y}{\sin(\alpha)} = \frac{mg}{2n \sin(\alpha)}$.

$$t = \frac{26 \cdot 500 \times 10^3 \times 9,81}{2 \times 104 \times \sin(25^\circ)} = 2,96 \times 10^6 \text{ N}.$$

- Si on multiplie la tension de rupture par unité de surface T_{rup} par la section d'un hauban S (sa surface transversale), on obtient la force maximale que le hauban peut supporter. Puisqu'on veut un facteur de sécurité de 10, on veut que la tension dans un hauban soit 10 fois inférieure à cette valeur maximale : $T = S \times \frac{T_{\text{rup}}}{10}$.

Or, l'expression de la section d'un cylindre en fonction de son diamètre d est : $S = \pi \frac{d^2}{4}$.

On obtient donc $T = \pi \frac{d^2}{4} \times \frac{T_{\text{rup}}}{10}$ ou $d = \sqrt{\frac{40}{\pi} \frac{T}{T_{\text{rup}}}}$. $d = \sqrt{\frac{40 \cdot 2,96 \cdot 10^6}{\pi \cdot 350 \cdot 10^6}} = 33 \text{ cm}$.

- La longueur du hauban le plus grand est $L = \sqrt{160^2 + 75^2} = 177 \text{ m}$ par théorème de Pythagore. Son volume est donc $V = LS$ et sa masse $M = V\rho = LS\rho$ avec ρ la masse

volumique de l'acier. Finalement, $M = 177 \times \pi \times \frac{0,33^2}{4} \times 8000 = 121 \text{ t}$.

- Une centaine de haubans pesant une centaine de tonnes chacun donne 10 000 t ce qui est beaucoup plus grand que 740 t. Les haubans ne sont toutefois pas tous aussi grands que celui dont on a calculé le poids. On peut estimer grossièrement que le hauban le plus petit fait 20 % de la taille du plus grand à partir de la photo, ce qui veut dire que la taille moyenne d'un hauban est $0,6L$ (c'est très grossier comme calcul, on veut juste un ordre de grandeur). Ceci multiplie le résultat par 0,6 mais la masse totale 6000 t est toujours presque 10 fois plus grande que 740 t.

Une autre explication peut être que l'angle α est en réalité de plus en plus grand pour des haubans les plus petits (voir photo), ce qu'on n'a pas pris en compte. Si α est plus grand, $\sin(\alpha)$ est plus grand et donc t est plus petit. Avec une tension plus faible, on peut imaginer que les haubans les plus courts ont un diamètre plus petit et donc moins de masse que prévu par nos calculs.

Enfin un autre aspect est qu'on a supposé que les haubans portaient exactement la moitié du poids du pont, ce qui est probablement une très grossière approximation. La réalité est probablement différente et ceci pourrait expliquer pourquoi on ne trouve pas la valeur de masse donnée pour les haubans.

Exercice 10 : Sur la corde raide

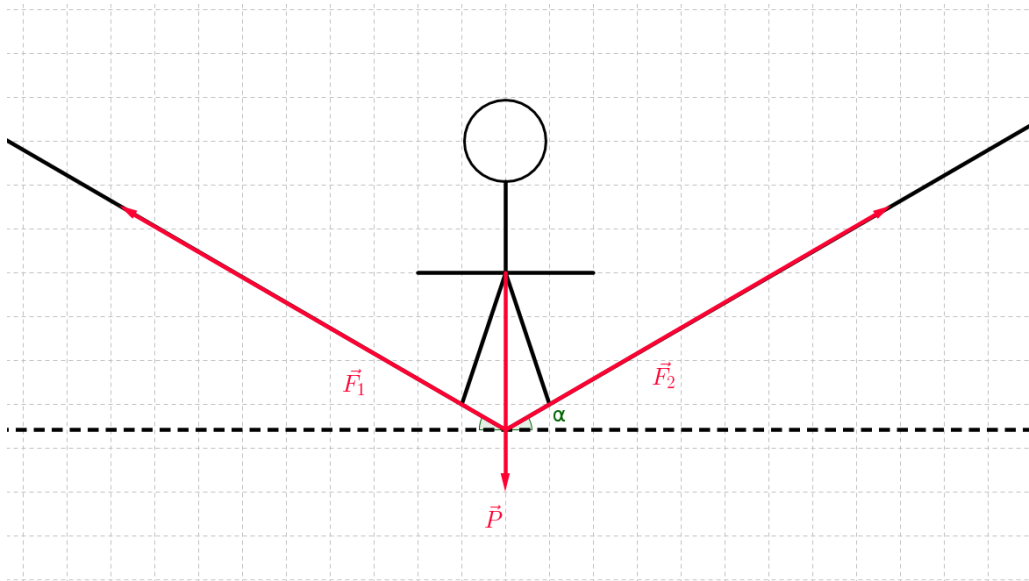


FIGURE 1 – Schéma du problème avec $\alpha = 10^\circ$

La 1 montre le schéma du problème. Le poids de l'équilibriste est vers le bas, la réaction de la corde vers le haut. Mais cette réaction est la somme de deux composantes, chacune le long de la corde, partant des pieds de l'équilibriste et allant en direction des extrémités de la corde. Le principe d'inertie nous donne alors $\vec{P} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}$.

La projection sur l'axe horizontal donne $F_1 \cos(\alpha) = F_2 \cos(\alpha)$, donc $F_1 = F_2$.

La projection sur l'axe vertical donne $-P + 2 \sin(\alpha)F = 0$ avec $F = F_1 = F_2$ la norme des vecteurs \vec{F}_1 et \vec{F}_2 .

La tension dans la corde est donc
$$F = \frac{P}{2 \sin(\alpha)} = \frac{70 \times 9,81}{2 \times \sin(10^\circ)} = 2,0 \text{ kN}.$$

Exercice 11 : Force exercée par un piston

1. Le point A est immobile, donc les forces qui s'y appliquent se compensent. On a $\vec{F} + \vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \vec{0}$. Pour que cette relation soit vraie, \vec{T}_1 doit être sur la droite (OA) partant de A et s'éloignant de O . De même, \vec{T}_2 doit être sur la droite (AP) , partant de A et s'éloignant de P . Ainsi la somme de ces deux tensions peuvent compenser la force \vec{F} .

On projette maintenant l'équation sur l'axe horizontal : $F - T_1 \cos(\alpha) - T_2 \cos(\beta) = 0$.

Et sur l'axe vertical : $-T_1 \sin(\alpha) + T_2 \sin(\beta) = 0$, donc en supposant que $\alpha \neq 0$ on a :

$$T_1 = T_2 \frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)}.$$

On peut alors utiliser cette expression de T_1 dans l'équation précédente : $F - T_1 \cos(\alpha) - T_2 \cos(\beta) = 0$ devient $F - T_2 \frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)} \cos(\alpha) - T_2 \cos(\beta) = 0$. On peut ré-écrire $T_2 \left(\frac{\sin(\beta)}{\tan(\alpha)} + \cos(\beta) \right) =$

$$F, \text{ ou encore } T_2 \cos(\beta) \left(\frac{\tan(\beta)}{\tan(\alpha)} + 1 \right) = F. \text{ Finalement } T_2 = \frac{F}{\cos(\beta) \left(1 + \frac{\tan(\beta)}{\tan(\alpha)} \right)}.$$

2. La force exercée par la tige AP sur le piston est égale à $-\vec{T}_2$. Sa composante verticale est donc $-T_2 \sin(\beta)$. On a alors $f_y = -\frac{F}{\cos(\beta) \left(1 + \frac{\tan(\beta)}{\tan(\alpha)} \right)} \sin(\beta) = -\frac{F \tan(\beta)}{\left(1 + \frac{\tan(\beta)}{\tan(\alpha)} \right)}$. Finalement,

$$f_y = -\frac{F}{\left(\frac{1}{\tan(\beta)} + \frac{1}{\tan(\alpha)} \right)}.$$

3. Si $\alpha = \beta$ alors on a $f_y = -\frac{F}{\frac{2}{\tan(\alpha)}} = -\frac{F \tan(\alpha)}{2}$.

Quand $\alpha \rightarrow 0$, on a alors $\tan(\alpha) \rightarrow 0$, donc $f_y \rightarrow 0$. Plus l'angle est petit, moins on pousse sur le piston. À la limite, les tiges sont horizontales et ne poussent plus du tout.

Exercice 12 : Deux ballons en équilibre

1. Si la vitesse d'un corps ponctuel dans un repère galiléen est constante, alors la somme des forces s'exerçant sur le corps est nulle.
2. La situation est symétrique pour les deux ballons, on ne va donc s'intéresser qu'à un seul ballon. Il est soumis à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$, à la tension de la ficelle \vec{T} dirigée depuis le point d'attache de la balle vers le point d'attache des deux ficelles, et à la force électrostatique \vec{F}_e exercée par l'autre ballon. Cette dernière est répulsive vu la situation, et est donc dirigée à l'opposé de l'autre ballon. Le principe d'inertie donne donc $\vec{P} + \vec{T} + \vec{F}_e = 0$.
 Projétons cette relation sur l'axe vertical ascendant Oy : $-mg + T \cos(\alpha) + 0 = 0$, autrement dit $T \cos(\alpha) = mg$.

Maintenant suivant l'axe horizontal Ox dirigé vers la droite : $0 - T \sin(\alpha) + F_e = 0$, donc $F_e = T \sin(\alpha)$.

En combinant les deux équations, on obtient $F_e = mg \tan(\alpha)$. Or on connaît l'expression de la force électrostatique : $F_e = \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 d^2}$ avec ϵ_0 la constante diélectrique. On a donc

$$Q = \sqrt{4\pi\epsilon_0 d^2 mg \tan(\alpha)}.$$

3. Le calcul donne $Q = \sqrt{4\pi \times 8,85 \cdot 10^{-12} \times 0,40^2 \times 4 \cdot 10^{-3} \times 9,81 \times \tan(30^\circ)} = 6,35 \times 10^{-7} \text{ C}$.