Mécanique
Acquis d'apprentissage n°1 : les vecteurs

Consignes : Justifier toutes les réponses. Une réponse correcte non justifiée est considérée comme fausse en devoir. Soigner la rédaction des réponses et respecter les notations de l'énoncé.

— Le niveau de difficulté en calcul est représenté par l'échelle

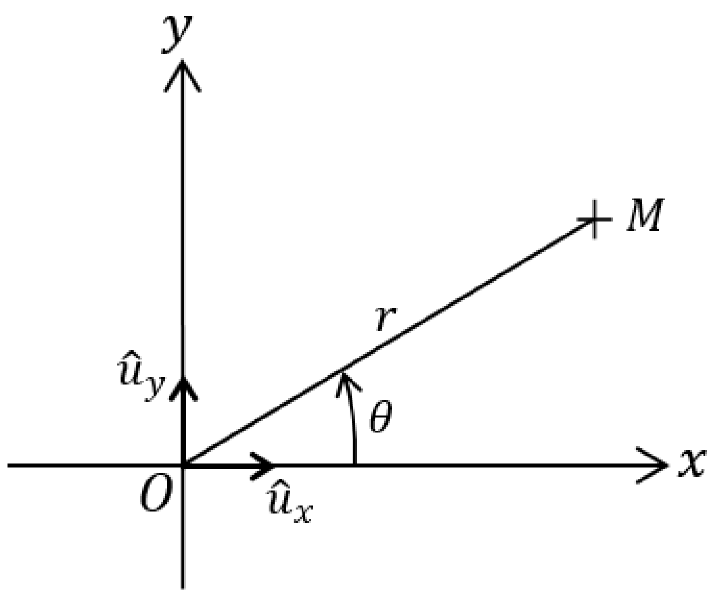
1 Les savoir-faire à connaître

Savoir déterminer les composantes d'un vecteur

Exercice 1 : Décomposition du vecteur position

La figure suivante montre la position d'un point M dans un repère cartésien à deux dimensions. On pose $\overrightarrow{OM} = x\widehat{u}_x + y\widehat{u}_y$.

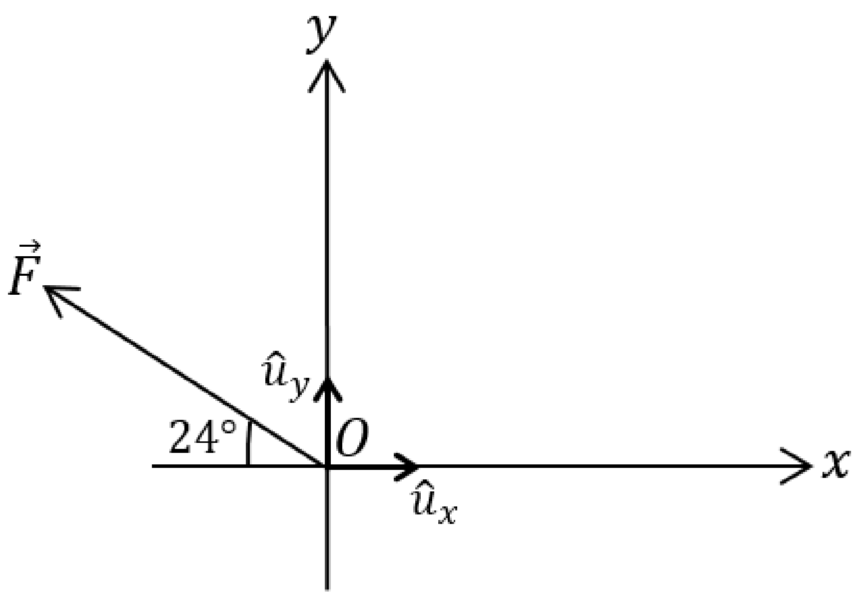
1. Déterminer les expressions des composantes x et y du vecteur $\overrightarrow{OM}$ en fonction de r et θ.
2. Montrer à partir de la question précédente que $x^2 + y^2 = r^2$.



Exercice 2 : Décomposition d'un vecteur force

La figure suivante montre un vecteur force de norme $F = 240\,\mathrm{N}$ dans un repère cartésien à deux dimensions. On pose $\vec{F} = F_x\widehat{u}_x + F_y\widehat{u}_y$.

1. Quels sont les signes de F_x et F_y ?
2. Calculer les valeurs de F_x et F_y.



Savoir calculer la norme d'un vecteur et connaitre sa signification géométrique

Exercice 3 : Norme de vecteurs

1. Écrire l'expression de la norme d'un vecteur $\vec{V}$ en fonction de ces composantes dans un repère cartésien à trois dimensions. Quel est le signe de la norme d'un vecteur ?
2. Un vecteur est représenté par une flèche dans un repère donné. A quoi correspond la norme d'un vecteur pour la flèche associée ?
3. Que vaut la norme d'un vecteur unitaire ?
4. Calculer la norme du vecteur $\vec{A} = 3\widehat{u}_x + 4\widehat{u}_y - 5\widehat{u}_z$.
5. Calculer la norme du vecteur $4\vec{A}$.
6. Soit $\vec{B} = -\widehat{u}_x + 2\widehat{u}_y + 6\widehat{u}_z$. Calculer la norme de $\vec{A} + \vec{B}$. Est-ce que $||\vec{A} + \vec{B}|| = ||\vec{A}|| + ||\vec{B}||$?

Savoir calculer un produit scalaire

Exercice 4 : Définitions du produit scalaire

Soit deux vecteurs $\vec{A} = 3\widehat{u}_x + 4\widehat{u}_y - 5\widehat{u}_z$ et $\vec{B} = -\widehat{u}_x + 2\widehat{u}_y + 6\widehat{u}_z$.

1. Calculer $B_y = \vec{B}.\widehat{u}_y$.
2. Quelle composante de $\vec{A}$ vaut -5 ?
3. Calculer le produit scalaire $\vec{A}.\vec{B}$ en utilisant $\vec{A}.\vec{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$.

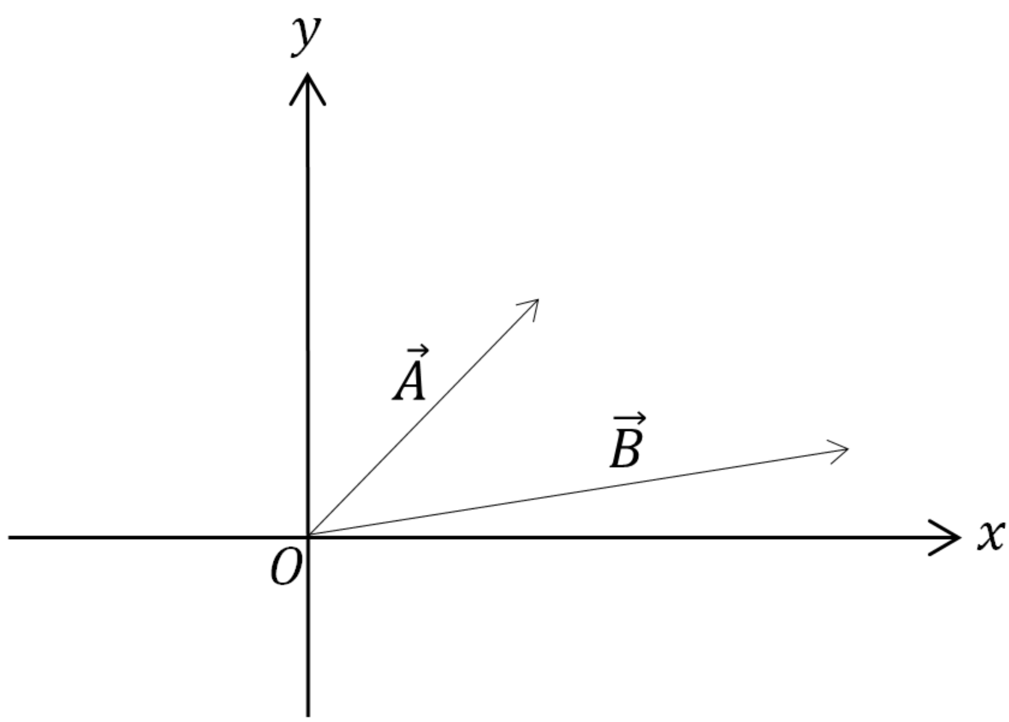
4. Calculer l'angle en degré entre les deux vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$.
5. Montrer que $(\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B})^2 = ||\overrightarrow{A}||^2 + ||\overrightarrow{B}||^2 + 2\overrightarrow{A}.\overrightarrow{B}$. En déduire la norme du vecteur $\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}$ en utilisant le produit scalaire $\overrightarrow{A}.\overrightarrow{B}$.

Savoir tracer graphiquement la somme et la différence de deux vecteurs

Exercice 5 : Tracé de vecteurs

La figure ci-dessous montre deux vecteurs $\overrightarrow{A}$ et $\overrightarrow{B}$.

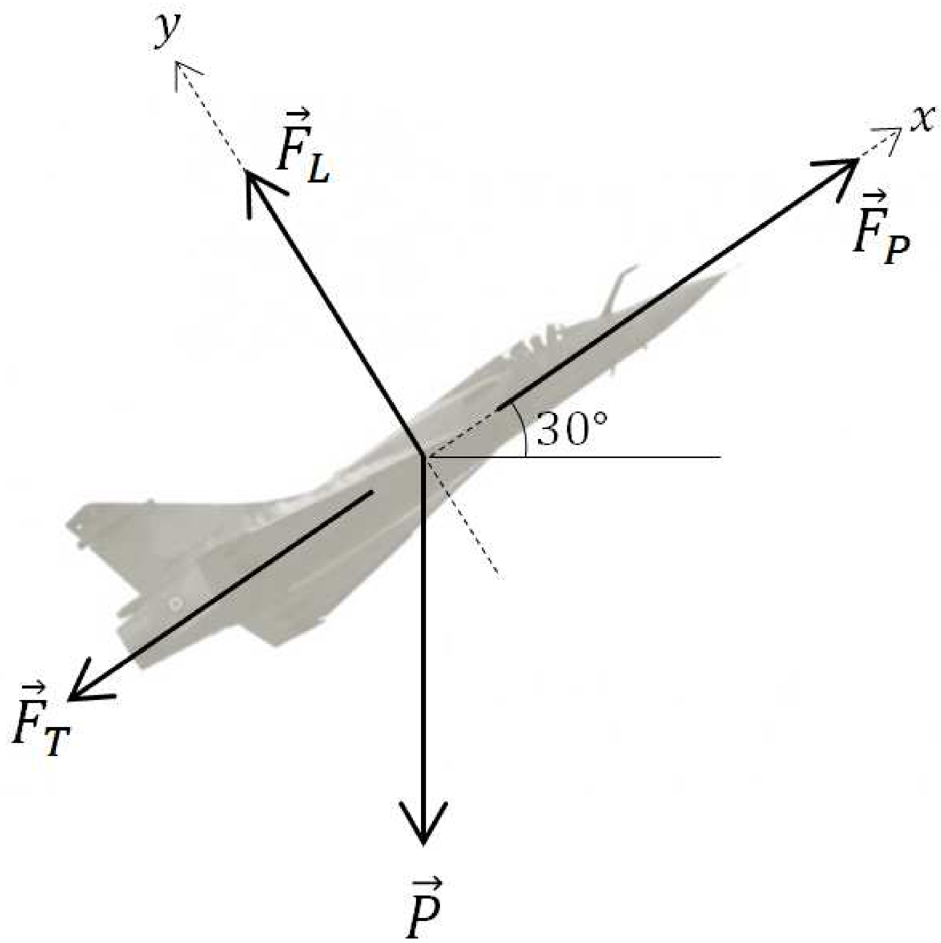
1. Représenter graphiquement les vecteurs $\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}$ et $\overrightarrow{A}-\overrightarrow{B}$.



Savoir projeter une équation vectorielle

Exercice 6 : Avion

Un avion vol en ligne droite à vitesse constante. L'avion est soumis à son propre poids $\overrightarrow{P}$ à la portance $\overrightarrow{F}_L$, à la force de trainée $\overrightarrow{F}_T$ et à la force de propulsion $\overrightarrow{F}_P$. L'ensemble de ces forces vérifie la relation $\overrightarrow{P} + \overrightarrow{F}_L + \overrightarrow{F}_T + \overrightarrow{F}_P = \overrightarrow{0}$.



1. Montrer que la projection de la relation $\overrightarrow{P} + \overrightarrow{F}_L + \overrightarrow{F}_T + \overrightarrow{F}_P = \overrightarrow{0}$ sur l'axe Ox a pour expression $-P\sin(30°) - F_T + F_P = 0$.
2. Projeter ensuite la relation $\overrightarrow{P} + \overrightarrow{F}_L + \overrightarrow{F}_T + \overrightarrow{F}_P = \overrightarrow{0}$ sur l'axe Oy.

3. Nous mesurons le poids de l'avion pour trouver $P = 86\,500\,\mathrm{N}$. La poussée des réacteurs est connue et de norme $\overrightarrow{F}_P$ vaut $103\,000\,\mathrm{N}$. En déduire les valeurs de la portance et de la force de trainée.

2 La mise en œuvre pour valider l'apprentissage

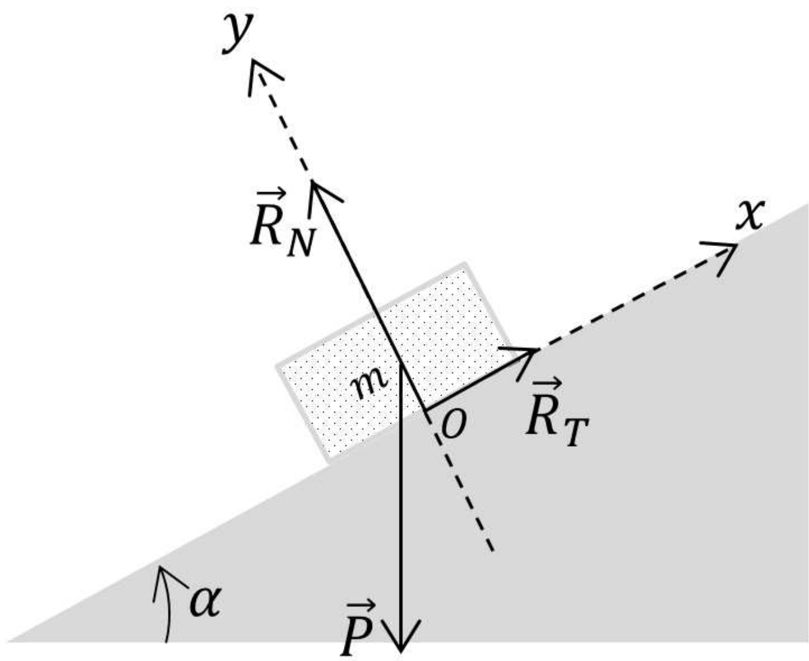
Pour chaque question **identifier le ou les savoir-faire** mis en jeu.

Exercice 7 : Bloc sur un plan incliné

La figure suivante montre un bloc posé sur un plan incliné. Les vecteurs sont schématisés à l'échelle sur cette figure.

1. Que vaut $\overrightarrow{R}_N.\overrightarrow{R}_T$?
2. Représenter graphiquement le vecteur $\overrightarrow{R} = \overrightarrow{R}_T + \overrightarrow{R}_N$.
3. Vérifier graphiquement que $\overrightarrow{R}_T + \overrightarrow{R}_N + \overrightarrow{P} = \overrightarrow{0}$. Que représente physiquement les vecteurs $\overrightarrow{P}$, $\overrightarrow{R}_N$ et $\overrightarrow{R}_T$?
4. Projeter la relation $\overrightarrow{R}_T + \overrightarrow{R}_N + \overrightarrow{P} = \overrightarrow{0}$ sur l'axe Ox.
5. Projeter ensuite la relation $\overrightarrow{R}_T + \overrightarrow{R}_N + \overrightarrow{P} = \overrightarrow{0}$ sur l'axe Oy.
6. Le bloc a une masse $m = 450\,\mathrm{g}$. On donne $\alpha = 29°$. Quelles sont les valeurs des composantes du vecteur $\overrightarrow{P}$ suivant les axes Ox et Oy ?

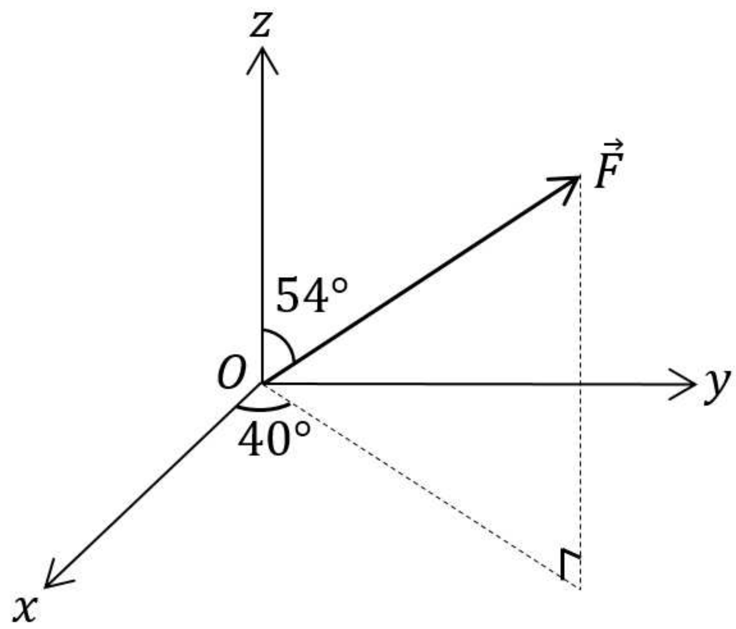
7. En déduire les valeurs de R_N et R_T.
8. Quelle est la norme du vecteur $\vec{R}$?



3 Pour approfondir

Exercice 8 : Composantes d'un vecteur force

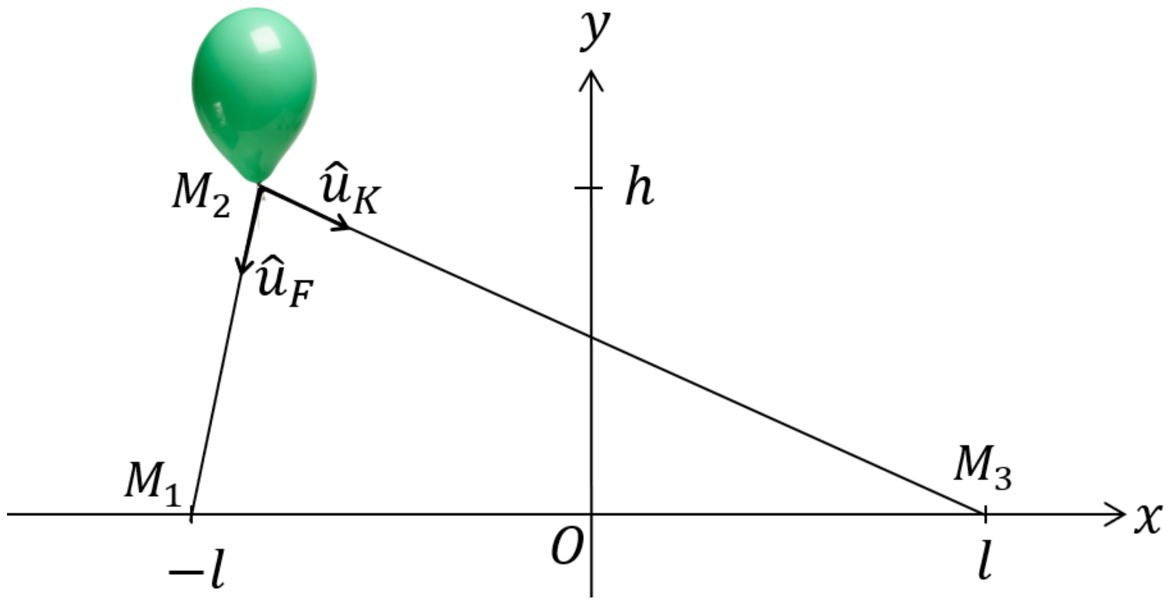
Le schéma montre un vecteur force de norme 475 N. Quelles sont les valeurs des composantes du vecteur force suivant les axes Ox, Oy et Oz ?



Exercice 9 : Ballon de baudruche

Un ballon de baudruche gonflé à l'hélium est retenu par deux ficelles. La longueur de la ficelle de gauche est de l.

Le vecteur $\overrightarrow{OM}_1$ a pour expression $\overrightarrow{OM}_1 = \begin{pmatrix} -l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et le vecteur $\overrightarrow{OM}_3$ a pour coordonnées $\overrightarrow{OM}_3 = \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$



1. Écrire en notation colonne le vecteur $\overrightarrow{M_2M_1}$.
2. Déterminer l'expression de la norme de $\overrightarrow{M_2M_1}$.
3. Montrer que $\hat{u}_F = \begin{pmatrix} -\sqrt{1-\lambda^2} \\ -\lambda \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $\lambda = \frac{h}{l}$.
4. Montrer que $\hat{u}_K = \begin{pmatrix} \frac{2-\sqrt{1-\lambda^2}}{\sqrt{\lambda^2+(2-\sqrt{1-\lambda^2})^2}} \\ \frac{-\lambda}{\sqrt{\lambda^2+(2-\sqrt{1-\lambda^2})^2}} \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $\lambda = \frac{h}{l}$.
5. Que devient l'expression des vecteurs unitaire si $\lambda = 0$, est-ce logique ?

Exercice 10 : Antenne

Une onde électromagnétique est une onde qui se propage sans support matériel à la vitesse de la lumière dans le vide. Une onde électromagnétique transporte un vecteur champ électrique noté $\vec{E}$ et un vecteur champ magnétique noté $\vec{B}$. Nous notons $\vec{k}$ le vecteur qui indique la direction de propagation de l'onde. Nous nous intéressons à l'onde électromagnétique la plus simple pour laquelle les vecteurs $\overrightarrow{k}$, $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{B}$ forment un trièdre direct.

En utilisant une antenne rectiligne, on cherche à capter une onde électromagnétique. Au voisinage de l'antenne, on sait que dans un repère cartésien $\vec{b} = (26750; -3660; 2619)$; $\overrightarrow{k} = (1; k_2; 8)$; $\overrightarrow{E} = (-9; E_2; E_3)$ où $\vec{b}$ est un vecteur indiquant la direction et le sens du champ magnétique.

1. Déterminer le vecteur propagation $\overrightarrow{k}$.
2. Déterminer le vecteur champ électrique $\overrightarrow{E}$.
3. Pour être efficace, une antenne doit être orienté parallèlement au champ électrique., en déduire le vecteur unitaire donnant l'orientation de l'antenne.