

Mécanique

Acquis d'apprentissage n°1 : les vecteurs

Consignes : Justifier toutes les réponses. Une réponse correcte non justifiée est considérée comme fautive en devoir. Soigner la rédaction des réponses et respecter les notations de l'énoncé.

— Le niveau de difficulté en calcul est représenté par l'échelle

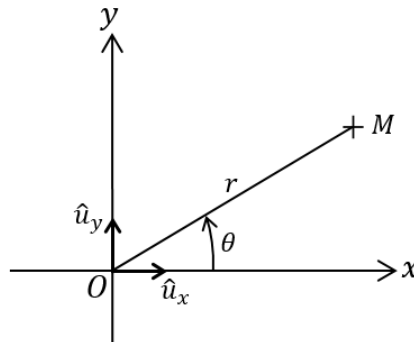
1 Les savoir-faire à connaître

Savoir déterminer les composantes d'un vecteur

Exercice 1 : Décomposition du vecteur position

La figure suivante montre la position d'un point M dans un repère cartésien à deux dimensions. On pose $\overrightarrow{OM} = x\hat{u}_x + y\hat{u}_y$.

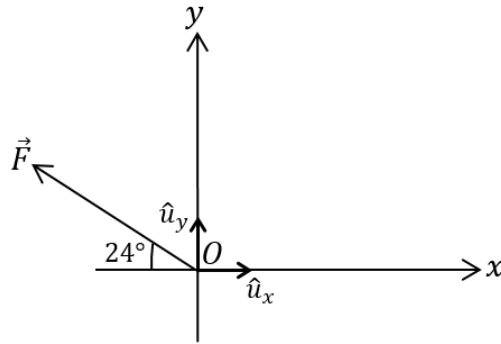
1. Déterminer les expressions des composantes x et y du vecteur \overrightarrow{OM} en fonction de r et θ .
2. Montrer à partir de la question précédente que $x^2 + y^2 = r^2$.



Exercice 2 : Décomposition d'un vecteur force

La figure suivante montre un vecteur force de norme $F = 240 \text{ N}$ dans un repère cartésien à deux dimensions. On pose $\vec{F} = F_x\hat{u}_x + F_y\hat{u}_y$.

1. Quels sont les signes de F_x et F_y ?
2. Calculer les valeurs de F_x et F_y .



Savoir calculer la norme d'un vecteur et connaître sa signification géométrique

Exercice 3 : Norme de vecteurs

1. Écrire l'expression de la norme d'un vecteur \vec{V} en fonction de ces composantes dans un repère cartésien à trois dimensions. Quel est le signe de la norme d'un vecteur ?
2. Un vecteur est représenté par une flèche dans un repère donné. À quoi correspond la norme d'un vecteur pour la flèche associée ?
3. Que vaut la norme d'un vecteur unitaire ?
4. Calculer la norme du vecteur $\vec{A} = 3\hat{u}_x + 4\hat{u}_y - 5\hat{u}_z$.
5. Calculer la norme du vecteur $4\vec{A}$.
6. Soit $\vec{B} = -\hat{u}_x + 2\hat{u}_y + 6\hat{u}_z$. Calculer la norme de $\vec{A} + \vec{B}$. Est-ce que $\|\vec{A} + \vec{B}\| = \|\vec{A}\| + \|\vec{B}\|$?

Savoir calculer un produit scalaire

Exercice 4 : Définitions du produit scalaire

Soit deux vecteurs $\vec{A} = 3\hat{u}_x + 4\hat{u}_y - 5\hat{u}_z$ et $\vec{B} = -\hat{u}_x + 2\hat{u}_y + 6\hat{u}_z$.

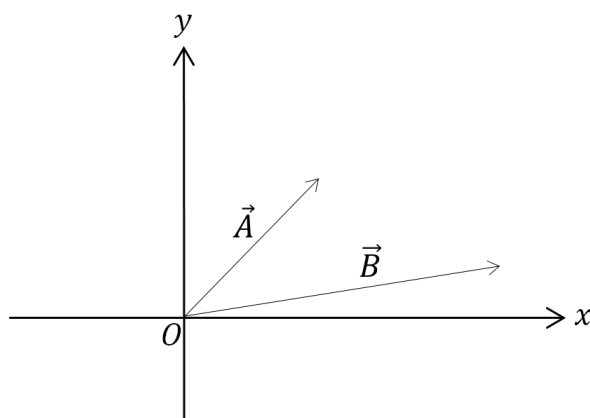
1. Calculer $B_y = \vec{B} \cdot \hat{u}_y$.
2. Quelle composante de \vec{A} vaut -5 ?
3. Calculer le produit scalaire $\vec{A} \cdot \vec{B}$ en utilisant $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$.
4. Calculer l'angle en degré entre les deux vecteurs \vec{A} et \vec{B} .
5. Montrer que $(\vec{A} + \vec{B})^2 = \|\vec{A}\|^2 + \|\vec{B}\|^2 + 2\vec{A} \cdot \vec{B}$. En déduire la norme du vecteur $\vec{A} + \vec{B}$ en utilisant le produit scalaire $\vec{A} \cdot \vec{B}$.

Savoir tracer graphiquement la somme et la différence de deux vecteurs

Exercice 5 : Tracé de vecteurs

La figure ci-dessous montre deux vecteurs \vec{A} et \vec{B} .

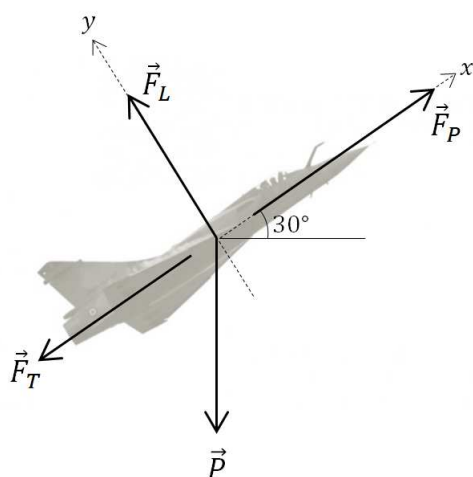
1. Représenter graphiquement les vecteurs $\vec{A} + \vec{B}$ et $\vec{A} - \vec{B}$.



Savoir projeter une équation vectorielle

Exercice 6 : Avion ■ ■

Un avion vol en ligne droite à vitesse constante. L'avion est soumis à son propre poids \vec{P} à la portance \vec{F}_L , à la force de trainée \vec{F}_T et à la force de propulsion \vec{F}_P . L'ensemble de ces forces vérifie la relation $\vec{P} + \vec{F}_L + \vec{F}_T + \vec{F}_P = \vec{0}$.



1. Montrer que la projection de la relation $\vec{P} + \vec{F}_L + \vec{F}_T + \vec{F}_P = \vec{0}$ sur l'axe Ox a pour expression $-P \sin(30^\circ) - F_T + F_P = 0$.
2. Projeter ensuite la relation $\vec{P} + \vec{F}_L + \vec{F}_T + \vec{F}_P = \vec{0}$ sur l'axe Oy .
3. Nous mesurons le poids de l'avion pour trouver $P = 86\,500$ N. La poussée des réacteurs est connue et la norme de \vec{F}_P vaut $103\,000$ N. En déduire les valeurs de la portance et de la force de trainée.

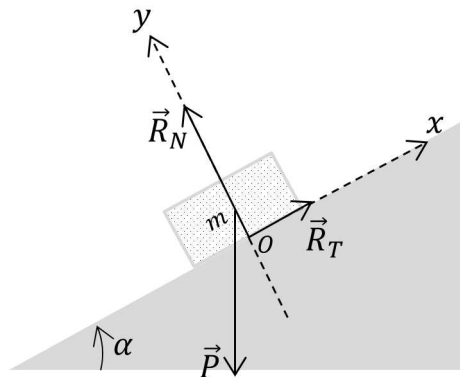
2 La mise en œuvre pour valider l'apprentissage

Pour chaque question identifier le ou les savoir-faire mis en jeu.

Exercice 7 : Bloc sur un plan incliné

La figure suivante montre un bloc posé sur un plan incliné. Les vecteurs sont schématisés à l'échelle sur cette figure.

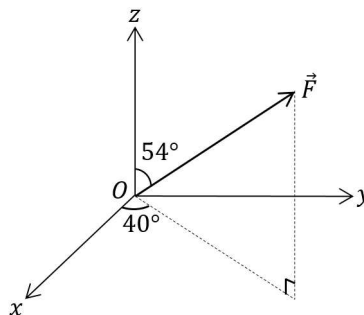
1. Que vaut $\vec{R}_N \cdot \vec{R}_T$?
2. Représenter graphiquement le vecteur $\vec{R} = \vec{R}_T + \vec{R}_N$.
3. Vérifier graphiquement que $\vec{R}_T + \vec{R}_N + \vec{P} = \vec{0}$. Que représente physiquement les vecteurs \vec{P} , \vec{R}_N et \vec{R}_T ?
4. Projeter la relation $\vec{R}_T + \vec{R}_N + \vec{P} = \vec{0}$ sur l'axe Ox .
5. Projeter ensuite la relation $\vec{R}_T + \vec{R}_N + \vec{P} = \vec{0}$ sur l'axe Oy .
6. Le bloc a une masse $m = 450$ g. On donne $\alpha = 29^\circ$. Quelles sont les valeurs des composantes du vecteur \vec{P} suivant les axes Ox et Oy ?
7. En déduire les valeurs de R_N et R_T .
8. Quelle est la norme du vecteur \vec{R} ?



3 Pour approfondir

Exercice 8 : Composantes d'un vecteur force

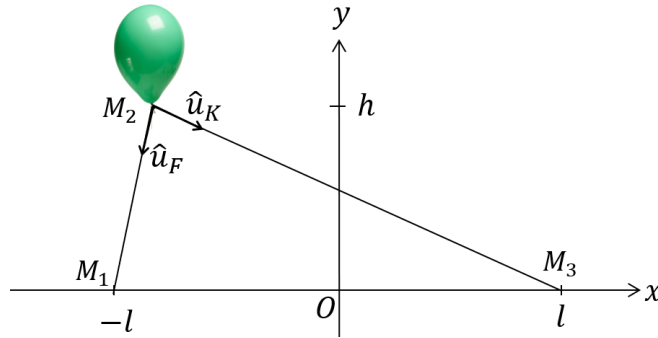
Le schéma montre un vecteur force de norme 475 N. Quelles sont les valeurs des composantes du vecteur force suivant les axes Ox , Oy et Oz ?



Exercice 9 : Ballon de baudruche ■ □

Un ballon de baudruche gonflé à l'hélium est retenu par deux ficelles. La longueur de la ficelle de gauche est de l . Le vecteur $\overrightarrow{OM_1}$ a pour expression $\overrightarrow{OM_1} = \begin{pmatrix} -l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et le vecteur $\overrightarrow{OM_3}$ a pour

coordonnées $\overrightarrow{OM_3} = \begin{pmatrix} l \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$



1. Écrire en notation colonne le vecteur $\overrightarrow{M_2M_1}$.
2. Déterminer l'expression de la norme de $\overrightarrow{M_2M_1}$.
3. Montrer que $\hat{u}_F = \begin{pmatrix} -\sqrt{1-\lambda^2} \\ -\lambda \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $\lambda = \frac{h}{l}$.
4. Montrer que $\hat{u}_K = \begin{pmatrix} \frac{2-\sqrt{1-\lambda^2}}{\sqrt{\lambda^2+(2-\sqrt{1-\lambda^2})^2}} \\ \frac{-\lambda}{\sqrt{\lambda^2+(2-\sqrt{1-\lambda^2})^2}} \\ 0 \end{pmatrix}$ avec $\lambda = \frac{h}{l}$.
5. Que devient l'expression des vecteurs unitaire si $\lambda = 0$, est-ce logique ?

Exercice 10 : Antenne ■ □

Une onde électromagnétique est une onde qui se propage sans support matériel à la vitesse de la lumière dans le vide. Une onde électromagnétique transporte un vecteur champ électrique noté \vec{E} et un vecteur champ magnétique noté \vec{B} . Nous notons \vec{k} le vecteur qui indique la direction de propagation de l'onde. Nous nous intéressons à l'onde électromagnétique la plus simple pour laquelle les vecteurs \vec{k} , \vec{E} et \vec{B} forment un trièdre direct.

En utilisant une antenne rectiligne, on cherche à capter une onde électromagnétique. Au voisinage de l'antenne, on sait que dans un repère cartésien $\vec{b} = (26750; -3660; 2619)$; $\vec{k} = (1; k_2; 8)$; $\vec{E} = (-9; E_2; E_3)$ où \vec{b} est un vecteur indiquant la direction et le sens du champ magnétique.

1. Déterminer le vecteur propagation \vec{k} .
2. Déterminer le vecteur champ électrique \vec{E} .
3. Pour être efficace, une antenne doit être orienté parallèlement au champ électrique., en déduire le vecteur unitaire donnant l'orientation de l'antenne.