Chapitre 7

Travail, théorème de l'énergie cinétique, théorème de l'énergie mécanique

Objectifs :

- définir l'énergie cinétique et potentielle
- calculer le travail d'une force
- utiliser le théorème de l'énergie cinétique
- utiliser le théorème de l'énergie mécanique

7.1 L'énergie

L'énergie est une quantité physique abstraite qui existe sous plusieurs formes différentes et se mesure en **Joules**. L'énergie liée au mouvement est l'énergie cinétique, l'énergie transportée par la lumière est l'énergie lumineuse, l'énergie associée à l'agitation thermique des atomes est l'énergie thermique, l'énergie contenue dans le noyau est l'énergie nucléaire, l'énergie qu'il faut fournir à un ressort pour l'étirer où à un matériau pour le déformer est l'énergie potentielle élastique, l'énergie qu'il faut fournir à un corps pour augmenter son altitude est l'énergie potentielle de pesanteur .... Si nous faisons la somme de toutes les formes d'énergie lors de l'évolution d'un système, nous constatons alors que l'énergie totale est constante.

En mécanique, nous nous intéressons uniquement à **l'énergie cinétique liée au mouvement d'ensemble d'un corps et à son énergie potentielle**. L'énergie potentielle est l'énergie que peut **potentiellement libérer un corps en changement de position lorsqu'une contrainte est relâchée**. Par exemple, nous pouvons étirer un ressort qui stocke alors de l'énergie potentielle sous forme élastique. Si nous relâchons le ressort, l'énergie potentielle élastique va se convertir sous forme d'énergie cinétique et le mouvement d'oscillation va s'initier.

L'énergie mécanique est la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle.

Le saviez-vous ?

Vous allez également voir en thermodynamique la notion d'énergie et plus précisément la notion d'énergie interne. L'énergie interne est l'énergie contenue dans un corps. Cette énergie provient de l'énergie cinétique des atomes et de l'énergie potentielle d'interaction des atomes.
En thermodynamique, il est possible d'apporter de l'énergie à un corps sans modifier son énergie mécanique. Supposons par exemple que nous chauffions un élastique avec un sèche-cheveux, nous ne faisons pas varier son énergie mécanique mais nous lui apportons pourtant de l'énergie. Dans ce cas, nous disons que nous faisons varier l'énergie interne du système.
Il y a deux façons très différentes de changer l'énergie interne d'un corps. Nous pouvons lui transférer de l'énergie sous forme de travail ou de chaleur. **Attention, le travail et la chaleur ne sont pas des énergies. Ce sont des transferts d'énergie**.
Au niveau microscopique, le travail est associé à un déplacement d'ensemble des particules. La chaleur est associée à une agitation thermique qui se propage de proche en proche.
Le premier principe nous dit comment l'énergie interne se modifie sous l'effet d'une transfert sous forme de chaleur ou de travail. Usuellement, on écrit le premier principe pour un système dont l'énergie mécanique n'est pas modifiée.

7.2 Le travail

7.2.1 Travail d'une force constante lors d'un déplacement rectiligne

L'action d'une force sur un système peut permettre de transférer de l'énergie à ce système. C'est **le travail de la force** qui est la mesure de ce **transfert d'énergie**. Si la force ne travaille pas, alors la force ne transmet pas d'énergie au système. Si le travail de la force est positif, alors la force transfère de l'énergie au système. On parle de force motrice dans ce cas. Si le travail est négatif, le système cède de l'énergie et la force est résistante dans ce cas. La quantité de travail se mesure en Joules puisque ce dernier est une mesure du **transfert d'énergie** à un système.

Nous souhaitons maintenant obtenir une formule pour calculer le travail. Imaginez-vous prendre une balle et la lancer. Vous transférez de l'énergie à la balle par l'intermédiaire de la force que vous exercez. Cela signifie que la force exerce un travail moteur. Il est clair que la force exercée peut transférer de l'énergie à la balle **si le point d'application de la force se déplace et si la force exercée a une composante dans le sens du déplacement.**

Ainsi, nous posons comme définition que le travail d'une force constante appliquée à un corps est le produit de la composante de la force dans la direction du mouvement par la distance sur laquelle la force agit.

Autrement dit, le travail d'une force constante dont le point d'application se déplace en ligne droite d'une distance $\vec{s}$ est donné par la formule :

$$\boxed{W = \vec{F}.\vec{s}} \tag{7.1}$$

Notons que le travail a la dimension d'une énergie mais ne représente pas une énergie. Le travail est un transfert d'énergie. Cette différence est importante.

Point notation

Le point . dans la formule $W = \vec{F}.\vec{s}$ représente le produit scalaire. Le produit scalaire est une application linéaire qui permet de produire un scalaire à partir de deux vecteurs. Le travail représente un transfert d'énergie, c'est donc bien une quantité scalaire. Notons que W est une grandeur algébrique, c'est-à-dire que la valeur numérique correspondant à W peut être positive ou négative.

7.2.2 Le travail d'une force dans le cas général

Nous avons jusqu'à présent considéré une force d'intensité et de direction constante et un corps qui se déplace en ligne droite.

Nous devons maintenant chercher l'expression du travail d'une force non constante et dont le point d'application se déplace le long d'une courbe par exemple. Voici comment nous allons procéder. Nous décomposons le chemin quelconque suivi par le système en une somme de ligne droite.

Nous introduisons une variable qui permet de repérer la position de la particule le long de sa trajectoire [1]. Nous notons s cette variable qui se nomme l'abscisse curviligne. Nous pouvons ainsi construire un vecteur $d\vec{s}$ qui représente **un déplacement infinitésimal** dans une direction tangente à la trajectoire.

Le travail de la force le long du chemin a donc pour expression :

$$W = \vec{F}_1.\delta\vec{s}_1 + \vec{F}_2.\delta\vec{s}_2 + ... + \vec{F}_3.\delta\vec{s}_N$$

Nous faisons maintenant tendre chaque petit segment vers zero de façon à reconstituer le chemin. Nous obtenons ainsi :

$$W = \lim_{\delta s_i \to 0} \sum_i \vec{F}_i.\delta\vec{s}_i = \int \vec{F}.\mathrm{d}\vec{s}$$

Nous avons donc généraliser notre formule 7.1 et nous pouvons écrire :

$$\boxed{W(A \to B) = \int_A^B \vec{F}.\mathrm{d}\vec{s}} \tag{7.2}$$

En introduisant un repère d'origine O, nous pouvons repérer la position d'un point le long de la trajectoire à l'aide d'un point M. Le vecteur déplacement le long de la courbe s'écrit alors $d\overrightarrow{OM}$. Notons que nous pouvons réécrire l'équation 7.2 en introduisant la vitesse $\vec{v} = \frac{d\vec{s}}{dt}$ soit $d\vec{s} = \vec{v}dt$. Nous obtenons ainsi :

$$\boxed{W(A \to B) = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F}.\vec{v}\,\mathrm{d}t} \tag{7.3}$$

1. La quantité de carburant dans le réservoir d'une voiture est un exemple de variable qui permet de repérer la position de la voiture le long de sa trajectoire

7.3 Le théorème de l'énergie cinétique

7.3.1 Un exemple simple pour commencer

Nous considérons un opérateur qui applique une force constante suivant Ox à une particule de masse m qui se déplace le long de l'axe Ox. Le pfd s'écrit :

$$m\ddot{x} = F_{op}$$

Une première intégration conduit à :

$$v(t) = v_0 + \frac{F_{op}}{m}t$$

Une deuxième intégration conduit à :

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\frac{F_{op}}{m}t^2$$

L'équation de la vitesse nous donne $t = \frac{m}{F_{op}}(v - v_0)$ ce qui nous donne :

$$x - x_0 = \frac{m}{F_{op}}(vv_0 - v_0^2) + \frac{1}{2}\frac{m}{F_{op}}(v^2 - 2vv_0 + v_0^2) = \frac{1}{2}\frac{m}{F_{op}}(v^2 - v_o^2)$$

Nous obtenons donc le résultat suivant :

$$\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = F_{op}(x - x_0) \tag{7.4}$$

Nous définissons l'énergie cinétique $E_C = \frac{1}{2}mv^2$ et le terme $F_{op}(x - x_0)$ représente le travail de la force F_{op} entre les positions x_0 et x. Ce travail a permis un transfert d'énergie cinétique à la particule. C'est le théorème de l'énergie cinétique.

Le saviez-vous ?

Notons qu'un corps en rotation possède une énergie cinétique de rotation d'expression $E_C = \frac{1}{2}I\omega^2$ où I (en $\mathrm{kg\,m^2}$) est une caractéristique de la répartition de la masse dans le solide et se nomme le moment d'inertie. ω est la vitesse angulaire.

7.3.2 Démonstration et énoncé

Nous considérons un corps **indéformable** de masse m qui se déplace entre A et B et qui est soumis à un ensemble de forces $\vec{F}_{ext}$. Le travail de ces forces a pour expression :

$$\sum W_{ext}(A \to B) = \int_{t_A}^{t_B} \sum \vec{F}_{ext}.\vec{v}\,\mathrm{d}t \tag{7.5}$$

Nous utilisons le principe fondamental de la dynamique pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\sum W_{ext}(A \to B) &= \int_{t_A}^{t_B} m\frac{d\vec{v}}{dt}.\vec{v}\,\mathrm{d}t && (7.6)\\
&= \frac{m}{2}\int_{t_A}^{t_B} \frac{d}{dt}(\vec{v}.\vec{v})dt && (7.7)\\
&= \frac{m}{2}\int_{v_A}^{v_B} \mathrm{d}v^2 && (7.8)\\
&= \frac{1}{2}m(v_B^2 - v_A^2) && (7.9)
\end{aligned}$$

Nous considérons un corps **indéformable** de masse m qui se déplace entre A et B. **Le théorème de l'énergie cinétique** s'écrit :

$$\boxed{E_C(B) - E_C(A) = \frac{1}{2}mv^2(B) - \frac{1}{2}mv^2(A) = \sum W_{ext}(A \to B)} \tag{7.10}$$

Où $\sum W_{ext}(A \to B)$ représente le travail de **toutes des forces extérieures** qui s'exercent sur le corps au cours de son trajet entre A et B.

Prenons l'exemple d'une balle en mousse que nous lançons contre le mur afin de bien comprendre les conditions d'applications de ce théorème. Considérons le système {balle en mousse}. Les seules forces extérieures que subit la balle au moment du choc est la force qu'exerce le mur sur la balle ainsi que le poids de la balle. Aucunes de ces deux forces ne travaillent puisque leurs points d'application ne se déplacent pas. Ainsi, l'énergie cinétique ne devrait pas avoir changée entre le début et la fin du choc de la balle sur le mur. Pourtant, il est clair que l'énergie cinétique de la balle a très fortement diminué au cours du choc. Nous arrivons donc à la conclusion que le théorème de l'énergie cinétique ne s'applique pas à un corps déformable car il faut tenir compte dans ce cas du travail des forces internes.

Nous pouvons obtenir un ordre de grandeur de l'intensité de ces forces grâce au calcul suivant. Nous considérons une balle de masse 30 g et de rayon 5 cm lancée à $6\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ qui perd 80 % de sa vitesse au moment du choc contre le mur. Dans le même temps, nous considérons que la balle est comprimé de la moitié de son rayon au moment du choc. L'ordre de grandeur des forces internes mises en jeu est donc $F_{int} = \frac{\Delta E_c}{\Delta R} \sim 4\,\mathrm{N}$. C'est également l'ordre de grandeur de la force qu'il faut appliquer pour déformer la balle.

7.4 Énergie mécanique

7.4.1 Énergie potentielle

Nous allons maintenant différencier les forces en deux catégories :

- **Les forces conservatives** $\vec{F_c}$
- **Les forces non conservatives** $\vec{F}_{nc}$

Une force est dite conservative si le travail de cette force ne dépend pas du chemin suivi. Nous nommons W_c le travail d'une force conservative et W_{nc} le travail d'une force non conservative. Les frottements sont un exemple de force non conservative. Considérons les deux chemins (1) et (2) de la figure 7.1, par définition $W_{c(1)}(A \to B) = W_{c(2)}(A \to B)$. Cela signifie que **le travail d'une force conservative ne dépend pas du chemin suivi mais uniquement des points d'arrivée et de départ.** Autrement dit, le travail d'une force conservative entre A et B qui s'écrit $W_c = \int_A^B \vec{F_c}.\mathrm{d}\vec{l}$ est égal à une fonction qui ne dépend que de A et de B. Nous posons donc :

$$\boxed{W_c(A \to B) = \int_A^B \vec{F_c}.\mathrm{d}\vec{l} = E_p(A) - E_p(B)} \tag{7.11}$$

où E_p est appelée la fonction **énergie potentielle**.

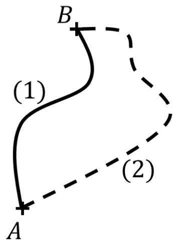

FIGURE 7.1 – Deux chemins différents pour aller de A à B.

7.4.2 Énergie potentielle élastique d'un ressort

Nous allons maintenant introduire la force $\vec{F}_{op}$ exercée par un opérateur pour déterminer l'expression de l'énergie potentielle élastique d'un ressort. Nous considérons un ressort horizontal de longueur au repos x_0 et de constante de raideur k. Nous considérons un opérateur qui étire à vitesse constante le ressort [2]. Le schéma de la situation est montré sur la figure suivante.

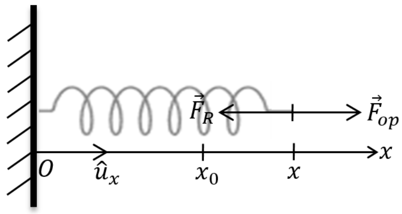

FIGURE 7.2 – Un ressort est étiré par un opérateur qui exerce une force F_{op}.

Puisque l'opérateur étire le ressort à vitesse constante, nous avons $F_{op} = k(x - x_0)\vec{u}_x$, le travail de la force exercée par l'opérateur pour étirer le ressort de x_0 à x a pour expression $W = \int_{x_0}^{x} k(x - x_0)dx$. Nous posons $X = x - x_0$ pour réécrire l'intégrale sous la forme $W = \int_0^X kXdX = \frac{1}{2}kX^2$. Le travail fourni par l'opérateur pour étirer le ressort est égal à l'énergie potentielle élastique stockée dans le ressort qui a donc pour expression :

$$E_p = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$$

7.4.3 Énergie potentielle de pesanteur

Sur le même principe, nous considérons un opérateur qui soulève d'une hauteur h à vitesse constante un corps de masse m. Le principe d'inertie nous dit que la force exercée par l'opérateur a pour norme mg dans ce cas. Le travail de la force exercée par l'opérateur a donc pour expression $W = \int_0^h mgdz = mgh$. L'énergie potentielle de pesanteur d'un corps de masse m qui passe de l'altitude $z = 0$ à $z = h$ à la surface de la Terre a donc pour expression :

$$E_{pp} = mgh$$

Notons que l'énergie potentielle est toujours définie à une constante près puisqu'il s'agit de l'énergie emmagasiner pour faire passer le corps d'un état à un autre. Cette variation est indépendante de la valeur initiale de l'énergie potentielle.

2. Nous devons considérer un opérateur qui déplace l'objet à vitesse constante pour pouvoir appliquer le principe d'inertie et connaître l'expression de la force exercée par l'opérateur

7.4.4 Le théorème de l'énergie mécanique

Nous allons maintenant démontrer le deuxième théorème capital concernant l'énergie en mécanique : **le théorème de l'énergie mécanique pour les corps indéformables**. Nous partons du théorème de l'énergie cinétique $\frac{1}{2}mv^2(B) - \frac{1}{2}mv^2(A) = \sum W_{ext}(A \to B)$ et nous décomposons la force en force conservative et non conservative. Nous obtenons donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2(B) - \frac{1}{2}mv^2(A) &= \sum W_{ext}(A \to B) \\ &= \sum W_c(A \to B) + \sum W_{nc}(A \to B) \\ &= E_p(A) - E_p(B) + \sum W_{nc}(A \to B) \end{aligned}$$

Nous introduisons l'énergie mécanique $E_m = E_c + E_p$ pour obtenir le théorème de l'énergie mécanique qui s'écrit, pour un corps indéformable :

$$\boxed{E_m(B) - E_m(A) = \sum W_{nc}(A \to B)} \tag{7.12}$$

où $\sum W_{nc}$ est la somme des travaux effectués par toutes les forces non conservatives. Nous obtenons donc également le résultat suivant : l'énergie mécanique d'un système **indéformable** dont les forces extérieures sont uniquement conservatives se conserve. Notons que ce résultat est **faux pour un corps déformable**. Dans ce cas, il faut tenir compte du travail des forces **intérieures** au système.

La video `https://pod.univ-lille.fr/physique-a-main-levee/mecanique-des-solides/video/1394-le-pendule-de-galilee/` montre expérimentalement la conservation de l'énergie mécanique.