Chapitre 6

Principe fondamental de la dynamique

Objectifs :

- savoir définir un référentiel Galiléen.
- savoir utiliser le principe fondamental de la dynamique dans un repère cartésien et un repère polaire.

6.1 Principe fondamental de la dynamique

Soit un corps ponctuel (dans le cas d'un corps non ponctuel, le principe fondamental de la dynamique s'applique au centre de masse du corps) de masse m dans un référentiel Galiléen soumis à un ensemble de forces, l'accélération de ce corps est donnée par **le principe fondamental de la dynamique (PFD)** :

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}} \tag{6.1}$$

où $\vec{p} = m\vec{v}$ est la quantité de mouvement du **système étudié**.

6.1.1 Cas d'un corps de masse variable

Dans le cas où la masse varie au cours du temps, nous obtenons :

$$\boxed{\vec{v}\frac{dm}{dt} + m\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}} \tag{6.2}$$

6.1.2 Cas d'un corps de masse constante

Le principe fondamental de la dynamique a pour expression dans ce cas :

$$\boxed{m\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}} \tag{6.3}$$

soit :

$$\boxed{m\vec{a} = \sum \vec{F}_{ext}} \tag{6.4}$$

C'est ce principe qui permet d'obtenir les équations horaires du mouvement. Sa formulation est simple, il faut néanmoins s'entrainer à l'appliquer dans de nombreux cas avant de le maitriser.

Nous pouvons tirer quelques conséquences immédiates de ce principe :

- **Principe d'inertie** : pour un corps qui se déplace à vitesse vectorielle constante $\vec{v} = \vec{cst}$, nous avons $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$ soit $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$. Nous retrouvons le principe d'inertie.
- **Principe d'équivalence** : analysons le principe fondamental de la dynamique dans le cas où la seule force extérieure est le poids, nous obtenons $m\vec{a} = m\vec{g}$ soit $\vec{a} = \vec{g}$. Nous retrouvons le résultat énoncé dans le chapitre sur la chute libre le mouvement du corps est ne dépend pas de sa masse. Ce principe implique qu'il n'est pas possible de faire une expérience dont les résultats dépendent de la valeur de la masse lorsque la force extérieure est uniquement le poids ou la force d'interaction gravitationnelle.
- **Référentiel Galiléen** : le principe fondamental de la dynamique ne change pas si nous transformons $\vec{v}$ en $\vec{v} + \vec{cst}$. Nous retrouvons le fait qu'il n'est pas possible de faire une expérience dont le résultat est différent d'un référentiel Galiléen à l'autre.

Nous allons maintenant voir quelques applications du principe fondamental de la dynamique.

6.2 Applications

6.2.1 Rebond d'une balle

Nous allons considérer le rebond d'une balle qui ne tourne pas sur elle-même contre un mur. Dans ce cas, la seule force qui s'exerce sur la balle pendant son rebond est une force normale à la surface. Nous allons noter $\vec{R}_N$ cette force que nous allons considérer constante.

La figure 6.1 montre les notations utilisées : $\vec{v}_i$ est la vitesse de la balle avant le rebond tandis que $\vec{v}_f$ est la vitesse de la balle après le rebond. Si nous notons Δt la durée du choc, nous avons alors :

$$\vec{p}_f - \vec{p}_i = \vec{R}_N \Delta t$$

La quantité $\Delta\vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i$ est appelée la percussion mécanique.

Si nous projetons la relation précédente sur un axe horizontal, nous obtenons :

$$p_f \sin\theta - p_i \sin\alpha = 0$$

La projection sur un axe vertical donne :

$$p_f \cos\theta + p_i \cos\alpha = R_N \Delta t$$

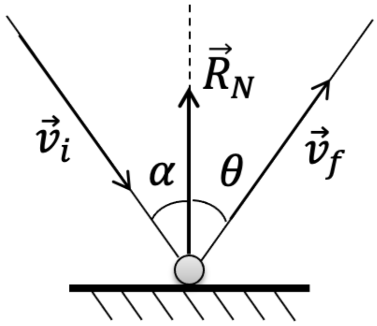

FIGURE 6.1 – Rebond d'une balle qui ne tourne pas sur-elle même.

Dans le cas où la collision de la balle ne produit pas de perte de vitesse de la balle (le choc est alors dit élastique) alors $p_f = p_i$ et :

$$\boxed{\theta = \alpha \quad \text{pour le choc élastique d'une balle sans rotation}} \tag{6.5}$$

Nous avons alors $R_N = \frac{2p_i \cos\alpha}{\Delta t}$.

6.2.2 Particule chargée dans un champ électrique uniforme constant

Nous allons voir que le champ électrique permet d'accélérer les particules chargées. C'est de cette manière que sont accélérées les particules dans l'univers et dans les accélérateurs de particules.

La video :
`https://www.synchrotron-soleil.fr/fr/videos/voyage-au-coeur-des-accelerateurs-de-soleil` montre le principe de fonctionnement du synchrotron Soleil.

On considère une particule de charge q initialement immobile plongée dans un champ électrique $\vec{E}$ uniforme et constant. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à la particule s'écrit (nous négligeons le poids et les forces de frottements) :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = q\vec{E}$$

La vitesse est obtenue en intégrant et a donc pour expression :

$$\boxed{\vec{v} = \frac{q\vec{E}}{m}t + \vec{v}_0} \tag{6.6}$$

La vitesse de la particule augmente donc au cours du temps, elle est accélérée. Notons que la vitesse des particules les plus massives augmente moins vite que la vitesse des particules les plus légères.

Le saviez-vous ?

L'équation précédente montre que la vitesse de la particule devrait augmenter indéfiniment. Pourtant, nous observons expérimentalement que les particules ne peuvent dépasser la vitesse de la lumière. La validité de la théorie de Newton est donc limitée et il faut utiliser la théorie de la relativité restreinte pour étudier les particules dont la vitesse par rapport à un observateur est proche de la vitesse de la lumière.

6.2.3 La troisième loi de Kepler

Nous allons ici appliquer le principe fondamental de la dynamique à une planète de masse m en rotation avec une trajectoire circulaire uniforme autour d'une étoile de masse M_S (figure 6.2). On se place dans le référentiel lié au centre de l'étoile considéré Galiléen.

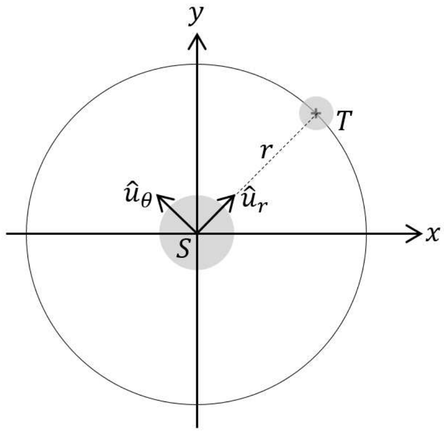

FIGURE 6.2 – Rotation d'une planète autour d'une étoile.

Le fait que le mouvement de la planète soit uniforme implique que la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ (en rad s^{-1}) est constante. Nous avons donc :

$$\dot{\theta} = \frac{2\pi}{T}$$

Où T est la temps mis par la planète pour faire un tour autour de son étoile.

Le principe fondamental appliqué à une planète s'écrit :

$$m\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = -G\frac{mM_S}{r^2}\vec{u}_r$$

Le vecteur position de la planète a pour expression dans le repère polaire :

$$\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$$

Le vecteur vitesse de la planète a donc pour expression dans le repère polaire :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

Le vecteur accélération de la planète a donc pour expression dans le repère polaire :

$$\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = -r\dot{\theta}^2\vec{u}_r$$

En remplaçant dans l'expression du principe fondamental de la dynamique, nous obtenons :

$$-mr\dot{\theta}^2 = -G\frac{mM_S}{r^2}$$

Nous obtenons donc :

$$r^3\dot{\theta}^2 = GM_S$$

Nous remplaçons ensuite la vitesse angulaire par son expression pour obtenir :

$$\boxed{\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM_S}{4\pi^2}} \tag{6.7}$$

Ce résultat constitue la **troisième loi de Kepler.**

Le saviez-vous ?

Le résultat précédent se généralise au cas où la planète a une trajectoire elliptique. En notant a le demi grand axe de la trajectoire elliptique, nous obtenons $\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM_S}{4\pi^2}$. Notons que ce résultat est valide uniquement si la masse de la planète est négligeable devant la masse de l'étoile.

Nous pouvons utiliser le résultat précédent pour déterminer la masse du Soleil. La distance Terre Soleil est environ de 150×10^9 m. La masse du Soleil vaut donc environ $M_s = 2{,}0 \times 10^{30}$ kg.