Chapitre 5

Mouvements de rotation et d'oscillation

Objectifs :

- savoir calculer la vitesse et l'accélération dans un repère polaire.
- savoir étudier un mouvement de rotation.
- savoir étudier le mouvement d'oscillation d'un pendule.

5.1 Le repère polaire

La figure 5.1 montre un corps M avec une trajectoire circulaire. Nous pouvons constater que le repère cartésien n'est pas forcement le plus adapté pour repérer la position d'un corps qui a une trajectoire circulaire. Nous allons utiliser **le repère polaire** qui est un repère tournant avec le point M.

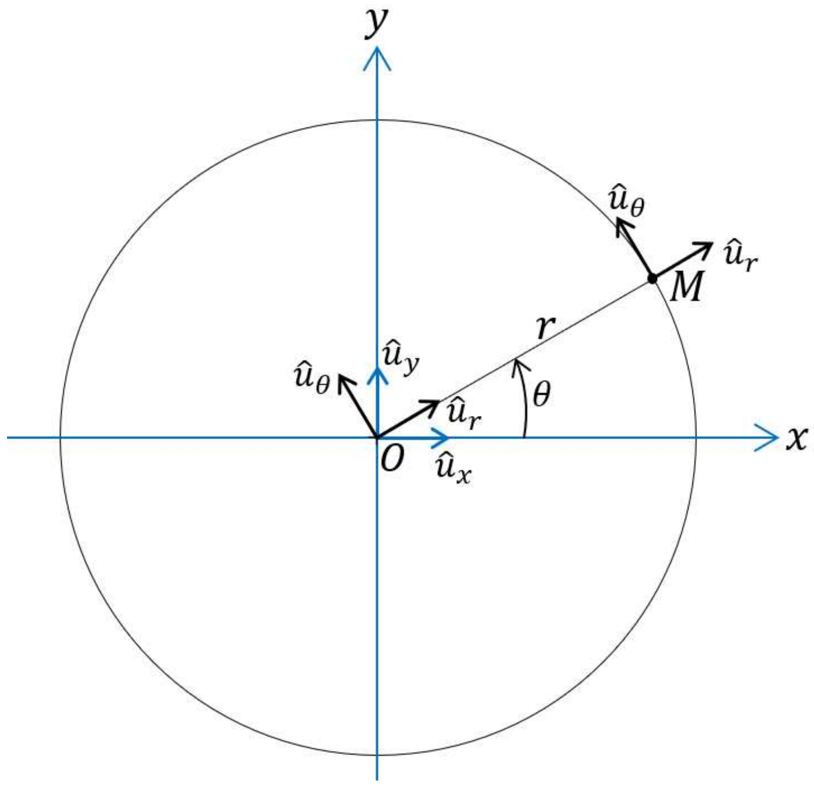

FIGURE 5.1 – Notations utilisées dans l'étude du mouvement circulaire uniforme en repère polaire.

Nous notons r la distance qui sépare le point M du centre O et θ l'angle positif entre OM et l'axe Ox qui permet de mesurer la rotation de la droite OM. Le vecteur unitaire le long de l'axe OM est noté $\vec{u}_r$. Le vecteur position du corps a pour expression dans un repère polaire :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r} \tag{5.1}$$

Nous notons $\vec{u}_\theta$ le vecteur unitaire perpendiculaire à $\vec{u}_r$ orienté dans le sens de l'angle θ. Les vecteurs $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$, $\vec{u}_z$ doivent être orientés en suivant la règle de la main droite.

Dans un repère cartésien, un point du plan est repéré par les coordonnées (x, y) alors qu'il est repéré par les coordonnées (r, θ) dans un repère polaire. Notons que nous devons toujours tracer le repère cartésien en plus du repère polaire sur un schéma pour pourvoir représenter l'angle θ.

Attention, contrairement au repère cartésien, la direction des vecteurs unitaires du repère polaire change au cours du temps. Cela signifie que la dérivée d'un vecteur unitaire du repère polaire par rapport au temps est non nulle. Nous allons maintenant calculer l'expression des dérivées de $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ par rapport au temps.

La figure 5.1 montre que :

$$\vec{u}_r = \cos(\theta)\vec{u}_x + \sin(\theta)\vec{u}_y$$

où $\vec{u}_r$ dépend du temps puisque l'angle θ dépend du temps. De même, la figure 5.1 montre que :

$$\vec{u}_\theta = -\sin(\theta)\vec{u}_x + \cos(\theta)\vec{u}_y$$

La dérivée des vecteurs unitaires a pour expression $\frac{d\vec{u}_r}{dt} = -\sin(\theta)\dot{\theta}\vec{u}_x + \cos(\theta)\dot{\theta}\vec{u}_y = \dot{\theta}\vec{u}_\theta$ et $\frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\cos(\theta)\dot{\theta}\vec{u}_x - \sin(\theta)\dot{\theta}\vec{u}_y = -\dot{\theta}\vec{u}_r$. Nous allons donc retenir les deux relation suivantes :

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{d\vec{u}_r}{dt} &= \dot{\theta}\vec{u}_\theta \qquad (5.2) \\ \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} &= -\dot{\theta}\vec{u}_r \qquad (5.3) \end{aligned}}$$

5.2 Calcul de la vitesse et de l'accélération d'un corps en mouvement circulaire

Le vecteur position du corps a pour expression $\overrightarrow{OM} = r\vec{u}_r$. Le vecteur vitesse, donné par $\vec{v} = \frac{\overrightarrow{OM}}{dt}$, se déduit de l'expression du vecteur position en remarquant que $r = cst$ **pour un mouvement circulaire**. Nous obtenons donc $\vec{v} = r\frac{d\vec{u}_r}{dt}$ soit :

$$\boxed{\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta} \tag{5.4}$$

où $\vec{v}$ est la vitesse orbitale. Le vecteur vitesse, orienté suivant $\vec{u}_\theta$, est donc tangent à la trajectoire. La grandeur $\dot{\theta}$ (parfois également noté ω) est la vitesse angulaire du corps (en $\mathrm{rad\,s^{-1}}$) et représente l'angle balayé par le corps par unité de temps.

La video suivante `https://www.canal-u.tv/video/science_en_cours/faisceau_d_etincelles.5681` montre expérimentalement que la vitesse orbitale est tangente à la trajectoire.

La video `https://www.canal-u.tv/video/tele2sciences/une_bille_prend_la_tangente.15240` montre le même phénomène avec une bille.

La video `https://pod.univ-lille.fr/physique-a-main-levee/mecanique-des-solides/video/1360-plus-rapide-que-la-chute-libre/` montre la comparaison d'un mouvement de chute libre vu dans le chapitre précédent et d'un mouvement de rotation décrit dans ce chapitre.

Le vecteur accélération, donné par $\overrightarrow{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$, a pour expression :

$$\boxed{\overrightarrow{a} = -r\dot{\theta}^2\vec{u}_r + r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta} \quad (5.5)$$

La terme $r\ddot{\theta}\vec{u}_\theta$ représente l'accélération orbitale tandis que le terme $-r\dot{\theta}^2\vec{u}_r$ représente l'accélération centripète car cette composante de l'accélération pointe constamment vers le centre du repère.

5.3 Cas d'un mouvement circulaire uniforme

Le qualificatif uniforme du mouvement signifie que la norme du vecteur vitesse est constante. Autrement dit $\| \vec{v} \| = cst$ ce qui implique $\dot{\theta} = cst$. Attention, le vecteur vitesse n'est pas constant dans un mouvement de rotation uniforme puisque la direction du vecteur vitesse change constamment au cours du temps.

Puisque $\dot{\theta} = cst$ dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme, nous avons alors $\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\vec{u}_r$. L'accélération est donc purement centripète et pointe constamment vers le centre (figure 5.2).

La norme de l'accélération dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme a pour expression $a = r\dot{\theta}^2$. La norme de la vitesse a pour expression $v = r\dot{\theta}$ d'où :

$$\boxed{a = \frac{v^2}{r}} \tag{5.6}$$

Le module de l'accélération centripète augmente avec la vitesse et diminue lorsque le rayon du mouvement circulaire augmente.

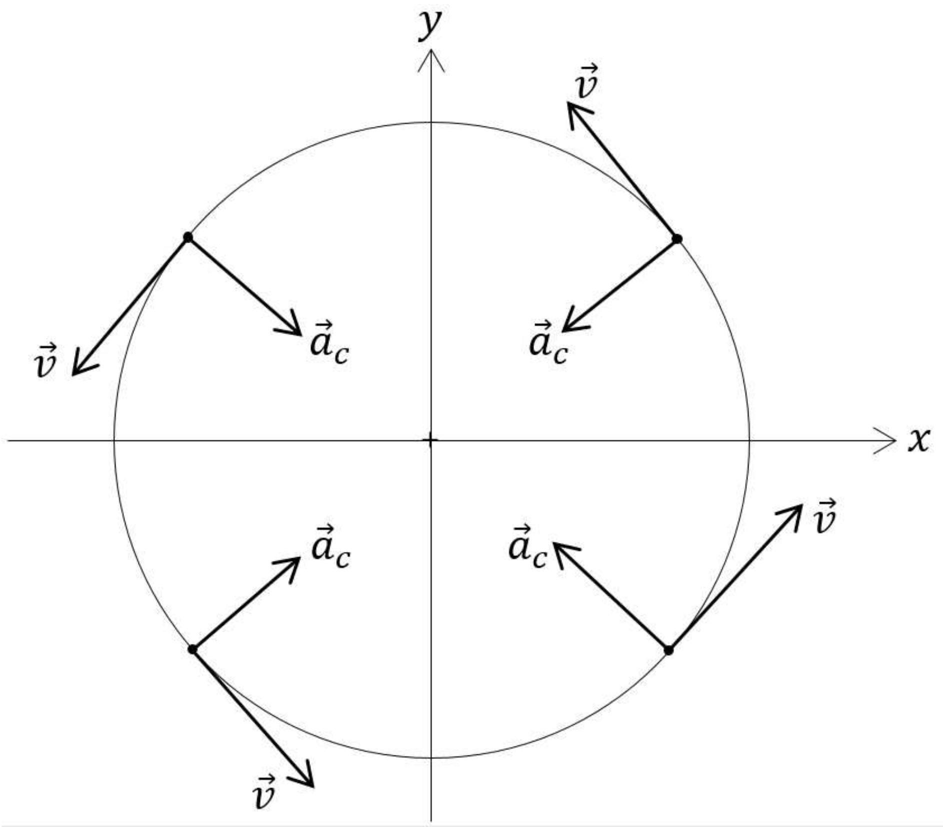

FIGURE 5.2 – Vecteurs accélération et vitesse.

Dans le cas d'un mouvement circulaire uniforme, nous pouvons définir une fréquence de rotation. Nous définissons la **la période** $T = \frac{2\pi r}{v}$ du mouvement comme le temps mis par le corps en rotation pour faire un tour complet, c'est-à-dire le temps mis par le corps en rotation pour revenir au même point. La **fréquence** du mouvement est définie comme l'inverse de la période, c'est-à-dire que $f = \frac{1}{T} = \frac{v}{2\pi r} = \frac{\dot{\theta}}{2\pi}$.

La fréquence représente le nombre de fois que le point repasse au même endroit par seconde. La période s'exprime en secondes et la fréquence en Hertz de symbole Hz. Pour un mouvement circulaire uniforme, la vitesse angulaire a également pour expression $\dot{\theta} = 2\pi f$.

5.4 Mouvement d'oscillation

Le repère polaire est également adapté pour étudier les mouvement d'oscillation des pendules.

Nous nous intéressons dans cette section à un pendule simple qui oscille aux petits angles sans frottement et est lâché sans vitesse d'un angle θ_M positif par rapport à la verticale. L'équation horaire de l'angle θ (figure 5.3) est alors donnée par :

$$\theta(t) = \theta_M \cos(\omega t)$$

où ω est la fréquence angulaire qui est reliée à la période d'oscillation du pendule par $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

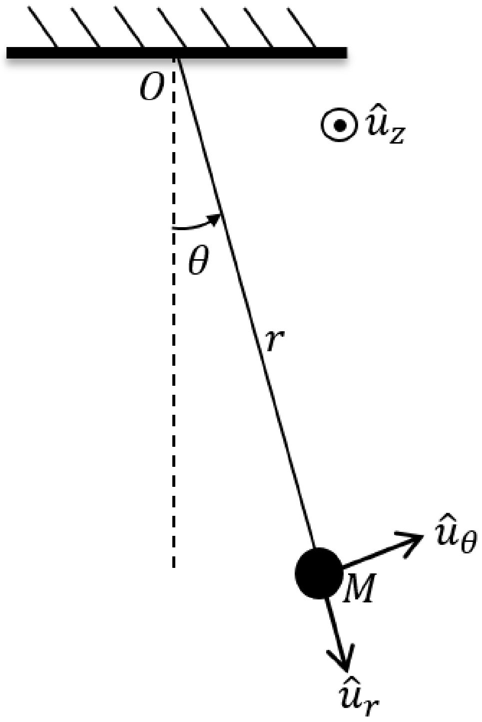

FIGURE 5.3 – Oscillation d'un pendule simple.

Le vecteur vitesse de la masse a pour expression $\vec{v} = -r\theta_M\omega\sin(\omega t)\vec{u}_\theta$. Nous en déduisons que $|v| = r\omega\theta_M\sqrt{1 - \frac{\theta^2}{\theta_M^2}}$. La vitesse est donc maximale pour $\theta = 0$ et est nulle aux extrémités pour $\theta = \theta_M$.

Le vecteur accélération a pour expression

$\vec{a} = -r\theta_M\omega^2\cos(\omega t)\vec{u}_\theta - r\theta_M^2\omega^2\sin^2(\omega t)\vec{u}_r$. Nous pouvons l'exprimer en fonction de l'angle θ et obtenir :

$$\vec{a} = -r\omega^2\theta\vec{u}_\theta - r\theta_M^2\omega^2\left(1 - \frac{\theta^2}{\theta_M^2}\right)\vec{u}_r$$

L'accélération tangentielle est donc nulle en $\theta = 0$ et maximale aux extrémités (là où la vitesse change de sens) alors que la composante centripète est nulle aux extrémités pour $\theta = \theta_M$ et maximale au centre là où la vitesse du pendule est la plus élevée.